Письма в ЖЭТФ, том 75, вып. 2, с. 71 – 73 © 2002 г. 25 января

# Взаимодействие нелинейных резонансов в резонаторной квантовой электродинамике

*С. В. Пранц*

*Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева Дальневосточного отделения РАН, 690041 Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 13 декабря 2001 г.

Сильная связь внутренних и внешних степеней свободы холодного атома друг с другом и с пространственно периодическим полем стоячей световой волны высокодобротного резонатора приводит к динамической неустойчивости движения атомного центра масс. Показано, что вследствие слабого взаимодействия внутренних нелинейных резонансов в стандартной модели резонаторной квантовой электродинамики возникает стохастический слой, ширина которого оценивается в полуклассическом приближении в терминах основных параметров системы – частоты отдачи атома, среднего числа возбуждений и резонансной расстройки. В результате движение атома в абсолютно регулярном потенциале является фрактальным – с длинными полетами типа Леви, перемежаемыми малыми хаотическими колебаниями в потенциальных ямах.

PACS: 05.45.Mt, 42.50.Vk

Эксперименты с отдельными атомами и фотонами в высокодобротных резонаторах Фабри–Перо [1, 2] открывают новые возможности для управления внутренними и внешними квантовыми состояниями атомов, их охлаждения и обработки квантовой информации. Современная резонаторная квантовая электродинамика достаточно хорошо развита для проверки основных постулатов квантовой механики (запутанных квантовых состояний, нелокальности взаимодействия и др.) и изучения фундаментальной проблемы квантово-классического соответствия – квантового хаоса. Наряду с теоретическими и численными исследованиями сильно связанных атомно-полевых систем с гамильтонианами, порождающими классический хаос [3 – 6], имеются работы [7, 8], в которых экспериментально реализован квантово-электродинамический вариант хорошо изученной теоретиками модели квантового ротора – холодный атом, периодически возбуждаемый импульсами стоячей волны с частотой, далеко отстроенной от частоты атомного перехода. Для больших расстроек (по сравнению с естественной шириной линии) динамика атомного центра масс в поле модулированной стоячей волны описывается гамильтонианом с 3/2 степенями свободы [9]. Вообще говоря, взаимодействие атомов с фотонами в высокодобротном резонаторе даже в простейшем одномерном случае есть взаимодействие трех степеней свободы – полевой, внутриатомной и трансляционной. Такая модель была введена в работе [10] в контексте гамильтонова хаоса.

Целью настоящей работы является выяснение и анализ механизма возникновения гамильтонова хаоса во взаимодействии холодных атомов с полем стоячей волны в высокодобротном резонаторе. В полуклассическом приближении показано, что хаос возникает в результате модуляции медленного трансляционного движения атома быстрыми осцилляциями Раби, что приводит к формированию узкого стохастического слоя в окрестности сепаратрисы невозмущенного движения даже в отсутствие какой-либо модуляции стоячей волны. На основе редуцированных уравнений движения аналитически найдена ширина стохастического слоя в терминах основных параметров системы, расстройки, частоты атомной отдачи и среднего числа возбуждений.

Гамильтониан взаимодействия холодного двухуровневого атома с выделенной гармонической модой квантованного электромагнитного поля идеального резонатора с учетом атомной отдачи имеет следующий вид в приближении вращающейся волны:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_f\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - \\ - \hbar\Omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)\cos(k\hat{x}), \tag{1}$$

где $\hat{x}$ и $\hat{p}$ – операторы координаты и импульса атома, $\hat{\sigma}$ – матрицы Паули, $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ – операторы полевой моды. Если выбрать в качестве динамических переменных следующие квантовые средние: $\xi = k_f\langle\hat{x}\rangle$, $\rho = \langle\hat{p}\rangle/\hbar k$, $u = \langle\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+\rangle$, $v = i\langle\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- - \hat{a}\hat{\sigma}_+\rangle$, $z = \langle\hat{\sigma}_z\rangle$, то нетрудно показать, что уравнения Гейзенберга порождают замкнутую нелинейную систему из пяти полуклассических уравнений движения:

$$\dot{\xi} = \alpha\rho, \quad \dot{\rho} = -u\sin\xi, \quad \dot{u} = \delta v,$$
$$\dot{v} = -\delta u + \left[(2N-1)z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}\right]\cos\xi, \qquad (2)$$
$$\dot{z} = -2v\cos\xi,$$

где точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \Omega_0 t$, а управляющие параметры $\alpha = \hbar k_f^2/m\Omega_0$, $\delta = (\omega_f - \omega_a)/\Omega_0$ и $N = \langle \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{\sigma}_z + 1)/2\rangle$ являются нормированной частотой отдачи атома, нормированной расстройкой резонанса и числом возбуждений, соответственно. Система (2) обобщает соответствующие уравнения в [10] на случай произвольного $N$. Интеграл движения

$$W = \frac{\alpha\rho^2}{2} - u\cos\xi - \frac{\delta}{2}z \qquad (3)$$

отражает сохранение энергии в задаче.

Из уравнений (2) следует, что при точном резонансе, $\delta = 0$, медленные трансляционные переменные $\xi$ и $\rho$ отделяются от быстрых внутриатомных и полевых $u$, $v$ и $z$. Атом движется в пространственно периодическом оптическом потенциале $U = -u_0\cos\xi$, движение его центра массы описывается простым уравнением свободного нелинейного маятника $\ddot{\xi} + \alpha u_0 \sin\xi = 0$ и в зависимости от значения энергии $W$ является либо регулярными колебаниями в потенциальной яме, либо регулярным полетом над вершинами $U$. Изменения внутренней энергии атома $z$ и энергии его взаимодействия с модой $u$ в случае $\delta = 0$ являются модулированными стоячей волной осцилляциями Раби с периодически изменяемой частотой [10].

Для выяснения механизма возникновения гамильтонова хаоса при $\delta \neq 0$ рассмотрим уравнения (2) в пределе большого числа возбуждений $N \gg 1$ и умеренной расстройки $\mid \delta \mid > 1$. Примем во внимание, что нормированная частота Раби есть величина порядка $\sqrt{N} > 1$, которая значительно больше частоты малых трансляционных колебаний $\sqrt{\alpha u_0} \ll 1$ (оценка безразмерной частоты отдачи атома, сильно связанного с полевой модой высокодобротного резонатора, дает величину порядка $\alpha < 10^{-2}$). В результате уравнения для быстрых переменных можно представить в виде уравнений блоховского типа

$$\dot{u} = \delta v, \quad \dot{v} = -\delta u + 2Nz\cos\xi, \quad \dot{z} = -2v\cos\xi, \qquad (4)$$

в которых функцию $\cos\xi$ можно считать константой $c$ на интервале времени многих осцилляций Раби. Нетрудно найти в этом приближении общее решение уравнений (4), из которого нам понадобится только решение для энергии взаимодействия внутренних степеней свободы атома с модой:

$$u = u(0)\left[N\left(\frac{2c}{\Omega_N}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\Omega_N}\right)^2 \cos\Omega_N\tau\right] + $$
$$+ \frac{\delta}{\Omega_N}v(0)\sin\Omega_N\tau + \frac{2N\delta c}{\Omega_N^2}s_z(0)(1-\cos\Omega_N\tau), \qquad (5)$$

где $\Omega_N = \sqrt{\delta^2 + (2c)^2 N}$ – частота Раби. Поскольку функция $\cos\xi$ меняется во времени очень медленно по сравнению с быстроосциллирующими переменными $u$, $v$ и $z$, то переменную $u$ можно считать пространственно независимым амплитудно- и частотно-модулированным сигналом, управляющим движением атомного центра масс в соответствие с уравнением частотно модулированного нелинейного осциллятора:

$$\ddot{\xi} + \alpha u(\tau)\sin\xi = 0. \qquad (6)$$

Не теряя общности выводов, анализ этого уравнения можно упростить для $c = 1$ и специального начального условия, $u_0 = v_0 = 0$, $z_0 = 1$, соответствующего полностью возбужденному атому при $\tau = 0$ и произвольному состоянию поля. Тогда уравнение (6) выводится из следующего классического гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 - \omega^2\cos\xi + \omega^2\cos\Omega_N\tau\cdot\cos\xi = \mathcal{H}_0 + V, \qquad (7)$$

где $\mathcal{H}$ – невозмущенный гамильтониан свободного нелинейного осциллятора с частотой малых осцилляций $\omega = \sqrt{2\alpha N \mid \delta \mid}/\Omega_N$. Переписывая возмущение $V$ в виде

$$V = \frac{\omega^2}{2}\left[\cos(\xi + \Omega_N\tau) + \cos(\xi - \Omega_N\tau)\right], \qquad (8)$$

функцию (7) можно интерпретировать как гамильтониан частицы, движущейся в поле трех плоских волн в системе координат, движущейся с фазовой скоростью первой волны, тогда как фазовые скорости второй и третьей волн равны $\Omega_N$ и $-\Omega_N$, соответственно.

Вблизи сепаратрисы изменение трансляционной энергии атома $E = \mathcal{H}_0$ вычисляется с помощью скобки Пуассона [11]

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty}\{\mathcal{H}_0, V\}d\tau = \omega^2\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\xi}\sin(\xi - \Omega_N\tau)d\tau. \qquad (9)$$

Этот интеграл можно вычислить, используя известные значения переменных нелинейного маятника $\xi$ и $\dot{\xi}$, взятые на сепаратрисе, где энергия маятника равна $E_s = \omega^2$, а именно, $\xi_s = 4\ \mathrm{arctg}\exp[\pm\omega(\tau - \tau_n)]$, $\dot{\xi}_s =$

$= \pm 2\omega / \cosh[\omega(\tau - \tau_n)]$, где $\tau_n$ соответствует центру солитона скорости. В результате получим величину

$$\Delta E = \pm 4\pi\Omega_N^2 \frac{\exp(\pi\Omega_N/2\omega)}{\sinh(\pi\Omega_N/\omega)} \sin\Omega_N\tau_n, \qquad (10)$$

которая определяет безразмерную ширину стохастического слоя модулированного нелинейного осциллятора (7) в окрестности невозмущенной сепаратрисы $\delta E \simeq \max \mid \Delta E \mid / E_s$. Учитывая, что для реальных атомов $\Omega_N \gg \omega$, окончательно получим выражение

$$\delta E \simeq 8\pi \left(\frac{\Omega_N}{\omega}\right)^3 \exp(-\pi\Omega_N/2\omega), \qquad (11)$$

в котором отношение $\Omega_N/\omega$ есть величина порядка $\sqrt{N/\alpha \mid \delta \mid}$. Заметим, что наш упрощенный анализ дает нижнюю границу ширины стохастического слоя. Таким образом, при любом значении параметров (в рамках сделанных приближений) в сильно связанной атомно-полевой системе с гамильтонианом (1) всегда существует область – зародыш классического хаоса, которая локализована в окрестности сепаратрисы и имеет экспоненциально малую ширину (11). Этот вывод подтверждается численными экспериментами, проведенными авторами [10], где вычислялись показатели Ляпунова и сечения Пуанкаре в различных диапазонах $\alpha$, $N$ и $\delta$.

Фазовый портрет параметрического нелинейного осциллятора (7), (8) на плоскости $d(\xi \pm \Omega_N\tau)/d\tau - (\xi \pm \Omega_N\tau)$ состоит из последовательности сепаратрисных петель с финитными траекториями внутри и инфинитными снаружи [11]. Ширина каждой петли и расстояние между ними равны $\omega$ и $2\Omega_N$, соответственно. При условии $\Omega_N \gg \omega$ эти нелинейные резонансы взаимодействуют, но не перекрываются [12]. В результате на месте сепаратрис возникают стохастические слои шириной, как минимум, порядка величины $\delta E$, которая может быть очень мала для характерных значений параметров $N \simeq 1 \div 10$, $\alpha < 10^{-2}$, $\mid \delta \mid \simeq 1$. Характер движения атома очень чувствителен к малым изменениям управляющих параметров, особенно расстройки $\delta$. В результате бифуркаций изменяется топология фазового пространства сильно связанной атомно-полевой системы. Это открывает новые возможности для манипуляций с холодными атомами, их охлаждения, ускорения и пленения в поле одного или нескольких фотонов.

Типичная хаотическая траектория атома в периодическом поле стоячей волны (характеризуемая малым положительным показателем Ляпунова) состоит из длинных участков регулярного баллистического движения, так называемых полетов Леви, перемежаемых хаотическими малыми колебаниями атома в потенциальных ямах. Полеты Леви оказывают существенное влияние на глобальные транспортные свойства гамильтоновых систем, приводя к аномальной или "странной" кинетике [13]. В недавних численных экспериментах [14] с атомно-полевой системой с тремя связанными степенями свободы было показано, что такие статистические характеристики движения, как распределение времен возвратов Пуанкаре и моменты координаты центра масс холодного атома, свидетельствуют об аномальной диффузии атома. Полеты Леви можно использовать для лазерного охлаждения атомов ниже предела отдачи, что было продемонстрировано в экспериментах [15, 16].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты # 99-02-17269 и # 01-02-06020).

---


1. J. Ye, D. W. Vernooy, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **83**, 4987 (1999).
2. P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3791 (1999).
3. P. I. Belobrov, G. M. Zaslavskii, and G. Kh. Tartakovskii, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **71**, 1799 (1976) [Sov. Phys. JETP **44**, 945 (1976)].
4. G. P. Berman, E. N. Bulgakov, and D. D. Holm, *Crossover time in quantum boson and spin systems*, Springer, Berlin, 1994.
5. S. V. Prants, L. E. Kon'kov, and I. L. Kirilyuk, Phys. Rev. **E60**, 335 (1999).
6. S. V. Prants and L. E. Kon'kov, Phys. Rev. **E61**, 3632 (2000).
7. F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 4598 (1995).
8. H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen, Phys. Rev. Lett. **80**, 4111 (1998).
9. R. Graham, M. Schlautmann, and P. Zoller, Phys. Rev. **A45**, R19 (1992).
10. S. V. Prants and V. Yu. Sirotkin, Phys. Rev. **A64**, 033412 (2001).
11. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников, *Слабый хаос и квазирегулярные структуры*, М.: Наука, 1991. [G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, *Weak Chaos and Quasiregular Patterns*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1991].
12. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
13. M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and J. Klafter, Nature **363**, 31 (1993).
14. S. V. Prants, M. Edelman, and G. M. Zaslavsky, Phys. Rev. **E** (to be submitted).
15. F. Bardou, J. P. Bouchaud, O. Emile et al., Phys. Rev. Lett. **72**, 203 (1994).
16. J. Reichel, F. Bardou, M. Ben Dahan et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 4575 (1995).