

Перепутывание атомных состояний при коллективном радиационном распаде

А. М. Башаров¹⁾

Московский инженерно-физический институт, 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 ноября 2001 г.

После переработки 25 декабря 2001 г.

Показано, что релаксация в марковском приближении двух не взаимодействующих между собой атомов в поле общего термостата приводит к перепутыванию атомных состояний, которое со временем или исчезает, или принимает стационарное значение в зависимости от начальных условий.

PACS: 03.65.Ud

В последнее время в связи с задачами квантовой информации, квантовой телепортации, теории измерений и т.п. [1, 2] интерес привлекают так называемые перепутанные квантовые состояния, когда волновая функция (матрица плотности) системы не взаимодействующих между собой частиц не представляется произведением волновых функций (матриц плотности) отдельных частиц. Известные белловские состояния представляют собой пример максимально перепутанных состояний системы из двух двухуровневых частиц. Примером перепутанных фотонных состояний служит так называемый сжатый свет [3], используемый в экспериментах по телепортации фотонных состояний. Получению перепутанных атомных состояний посвящены недавние исследования [4–8] и уже множится поток исследований оптических эффектов с использованием перепутанных атомных состояний [9–11]. Обратный процесс разрушения перепутанных атомных состояний, являющийся составной частью декогерентности [12], часто связывают с релаксационными процессами. В данном сообщении показывается, что релаксационные процессы могут приводить не только к декогерентности, но и к противоположному процессу – перепутыванию атомных состояний, причем сами атомы могут быть и не взаимодействующими между собой (в отличие от [4–6]). Одним из основных условий перепутывания атомных состояний в процессе радиационного распада является наличие общего термостата. В качестве простого примера в данном сообщении рассматривается радиационный распад двух не взаимодействующих между собой двухуровневых атомов в поле общего термостата при нулевой температуре. В отличие от широко известной модели Дике и других моделей коллективного распада атомов

[13, 14] в данной работе для описания коллективного атомного распада используется новая модель, основанная на уравнениях Линдблада, позволяющая обсуждать динамику как симметричных по частицам атомных состояний, так и антисимметричных. Получено общее решение уравнений модели. В качестве критерия перепутанности атомных состояний в работе использован критерий Переса-Хородецких [15, 16], являющийся более сильным, чем неравенства Белла. Вычислены собственные значения двухчастичной атомной матрицы плотности, транспонированной по Пересу-Хородецким, и обнаружена область значений параметров задачи, в которой атомные состояния, полученные в результате распада неперепутанных начальных атомных волновых функций, становятся перепутанными. Подчеркнем, что до сих пор, имея в виду перепутывание состояний при радиационном распаде, речь шла о перепутывании атомного состояния с состоянием частиц термостата (см., например, недавнюю работу [17]).

Рассмотрим двухатомную систему, состоящую из одинаковых (что не обязательно) двухуровневых атомов, находящихся в общем электромагнитном поле. Выделим в операторе электрического поля продольную и поперечную части. Продольная часть обуславливает диполь-дипольное взаимодействие атомов. Поперечную часть электромагнитного поля будем рассматривать как термостатное поле:

$$\langle \Phi_0 | b_\omega^\dagger b_{\omega'} | \Phi_0 \rangle = N(\omega) \delta(\omega - \omega'),$$

$$\langle \Phi_0 | b_\omega b_{\omega'}^\dagger | \Phi_0 \rangle = (1 + N(\omega)) \delta(\omega - \omega'),$$

$$\langle \Phi_0 | b_\omega | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | b_\omega^\dagger | \Phi_0 \rangle = 0,$$

где b_ω^\dagger и b_ω – операторы рождения и уничтожения фотонов, $N(\omega)$ – плотность фотонов на частоте ω , $|\Phi_0\rangle$ – начальное состояние термостата. В предположении о марковском характере взаимодействия с

¹⁾e-mail: bash@online.ru

атомами поперечное электромагнитное поле описывается квантовым винеровским процессом [18, 19]. Записывая стандартным образом квантовое стохастическое уравнение Ито, получаем уравнение для двухатомной матрицы плотности \mathcal{R} (двухчастичные операторы обозначаем рукописными буквами) в виде

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{R}, \mathcal{H}_{sys}] - \widehat{\Gamma}\mathcal{R}, \quad (1)$$

в котором гамильтониан двухатомной системы в отсутствие всех других внешних полей и взаимодействий дается выражением

$$\mathcal{H}_{sys} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(C_3 \otimes \widehat{1} + \widehat{1} \otimes C_3) + \mathcal{V}_{d-d},$$

где ω_0 – частота атомного перехода, $C_3 = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$, а векторы $|0\rangle$ и $|1\rangle$ отвечают нижнему и верхнему энергетическим состояниям атома. Через \mathcal{V}_{d-d} обозначен оператор диполь-дипольного взаимодействия атомов, а $\widehat{\Gamma}\mathcal{R}$ представляет релаксационный оператор. Имея в виду выяснение роли термостата в перепутывании атомных состояний, будем рассматривать модельную ситуацию и пренебрегать диполь-дипольным взаимодействием. При этом полагаем, что термостат находится при нулевой температуре и фотоны в нем отсутствуют: $N(\omega) = 0$. Тогда $\mathcal{V}_{d-d} = 0$ и

$$\widehat{\Gamma}\mathcal{R} = \frac{\chi|d_{10}|^2}{2}(\mathcal{R}C_+C_- + C_+C_-\mathcal{R} - 2C_-\mathcal{R}C_+). \quad (2)$$

Здесь

$$C_{\pm} = C_{\pm} \otimes \widehat{1} + e^{\mp i\theta}\widehat{1} \otimes C_{\pm}. \quad (3)$$

$C_- = |0\rangle\langle 1|$ и $C_+ = |1\rangle\langle 0|$ – операторы уничтожения и рождения возбуждения двухуровневого атома. Вместе с оператором C_3 они дают реализацию алгебры $SU(2)$: $[C_+, C_-] = C_3$, $[C_3, C_{\pm}] = \pm 2C_{\pm}$. Множитель $e^{i\theta}$ учитывает возможную разность фаз электрического поля термостата из-за разного положения атомов в пространстве. Величина d_{10} представляет матричный элемент дипольного момента атома, а χ – константа связи атома с термостатом.

Заметим, что форма релаксационного оператора (2) является единой для кинетических уравнений, описывающих релаксацию в марковском приближении, что впервые доказано в работе Линдблада [20] при весьма общих предположениях о свойствах термостата и характере эволюции динамической системы.

Введем следующие обозначения: $\mathcal{R}_{el} = \langle e|\mathcal{R}|l\rangle$ и т.п., $|g\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$, $|f\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$, $|l\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$, $|e\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$. Здесь $|f\rangle$ – состояние двухчастичной системы, в которой первый (first) атом возбужден, а

второй находится в основном состоянии и т.д. В обозначениях матрицы как \mathcal{R}_{ij} , индекс i пробегает значения 1, 2, 3, 4 или g, f, l, e . Одночастичная матрица плотности, например, первого атома, $\rho^{(f)}$, определяется как $\rho^f = Sp_l\mathcal{R}$, $\rho_{11}^f = \mathcal{R}_{ee} + \mathcal{R}_{ff}$, $\rho_{00}^f = \mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{gg}$, $\rho_{10}^f = \mathcal{R}_{el} + \mathcal{R}_{fg}$.

Очевидно, что ненулевыми матричными элементами операторов C_{\pm} будут

$$\langle f|C_+|g\rangle = \langle g|C_-|f\rangle = 1, \quad \langle l|C_+|g\rangle = \langle g|C_-|l\rangle^* = e^{-i\theta},$$

$$\langle e|C_+|f\rangle = \langle f|C_-|e\rangle^* = e^{-i\theta}, \quad \langle e|C_+|l\rangle = \langle l|C_-|e\rangle = 1,$$

так что в матричном виде имеем

$$C_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти стационарное решение уравнений (1)–(3), заметим, что матричные элементы операторов между двухчастичным перепутанным состоянием $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle - e^{-i\theta}|l\rangle)$ и $|g\rangle$ или $|e\rangle$ равны нулю: $\langle e|C_+|a\rangle = \langle g|C_-|a\rangle = 0$. Векторы $|a\rangle$ и $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle + e^{-i\theta}|l\rangle)$ совместно с $|g\rangle$ и $|e\rangle$ образуют новый ортонормированный базис пространства состояний двухатомной системы. В этом базисе уравнения (1) и (2) принимают наиболее простой вид:

$$\frac{d\mathcal{R}_{gg}}{d\tau} = 2\mathcal{R}_{ss}, \quad \frac{d\mathcal{R}_{ee}}{d\tau} = -2\mathcal{R}_{ee}, \quad \frac{d\mathcal{R}_{ss}}{d\tau} = 2\mathcal{R}_{ee} - 2\mathcal{R}_{ss},$$

$$\frac{d\mathcal{R}_{aa}}{d\tau} = \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{ag}}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{ae}}{d\tau} = -\widetilde{\mathcal{R}}_{ae}, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_{sa}}{d\tau} = -\mathcal{R}_{sa}, \quad \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{sg}}{d\tau} = 2e^{i\theta}\widetilde{\mathcal{R}}_{es} - \widetilde{\mathcal{R}}_{sg},$$

$$\frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{se}}{d\tau} = -2\widetilde{\mathcal{R}}_{se}, \quad \frac{d\widetilde{\mathcal{R}}_{eg}}{d\tau} = -\widetilde{\mathcal{R}}_{eg},$$

где введено безразмерное время $\tau = \chi|d_{10}|^2t$, а знак тильда обозначает медленную (по сравнению с $\exp(\pm i\omega_0t)$) часть матрицы плотности, например $\mathcal{R}_{sg} = \widetilde{\mathcal{R}}_{sg} \exp(-i\omega_0t)$, $\mathcal{R}_{eg} = \widetilde{\mathcal{R}}_{eg} \exp(-2i\omega_0t)$ и т.п.

Общее решение уравнений (4) дается выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ss} &= (2\mathcal{R}_{ee}^{(0)}\tau + \mathcal{R}_{ss}^{(0)})e^{-2\tau}, \quad \mathcal{R}_{ee} = \mathcal{R}_{ee}^{(0)}e^{-2\tau}, \\ \mathcal{R}_{aa} &= \mathcal{R}_{aa}^{(0)}, \quad \mathcal{R}_{gg} = 1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)} - \{\mathcal{R}_{ss}^{(0)} + \mathcal{R}_{ee}^{(0)}(1+2\tau)\}e^{-2\tau}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{ag} &= \tilde{\mathcal{R}}_{ag}^{(0)}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{ae} = \tilde{\mathcal{R}}_{ae}^{(0)}e^{-\tau}, \quad \mathcal{R}_{sa} = \mathcal{R}_{sa}^{(0)}e^{-\tau}, \quad (5) \\ \tilde{\mathcal{R}}_{se} &= \tilde{\mathcal{R}}_{se}^{(0)}e^{-2\tau}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{eg} = \tilde{\mathcal{R}}_{eg}^{(0)}e^{-\tau}, \\ \mathcal{R}_{sg} &= \mathcal{R}_{sg}^{(0)}e^{-\tau} + 2e^{i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{es}^{(0)}(e^{-\tau} - e^{-2\tau}), \end{aligned}$$

где верхний индекс (0) отмечает начальное значение матрицы плотности. Существует очевидная связь

$$\mathcal{R}_{ff} = \frac{1}{2}\{\mathcal{R}_{ss} + \mathcal{R}_{aa} + \mathcal{R}_{as} + \mathcal{R}_{sa}\},$$

$$\mathcal{R}_{ll} = \frac{1}{2}\{\mathcal{R}_{ss} + \mathcal{R}_{aa} - \mathcal{R}_{as} - \mathcal{R}_{sa}\},$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{el} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\{\tilde{\mathcal{R}}_{es} - \tilde{\mathcal{R}}_{ea}\}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\tilde{\mathcal{R}}_{ea} + \tilde{\mathcal{R}}_{es}\}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{gl} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\{\tilde{\mathcal{R}}_{gs} - \tilde{\mathcal{R}}_{ga}\}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{gf} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\tilde{\mathcal{R}}_{ga} + \tilde{\mathcal{R}}_{gs}\},$$

$$\mathcal{R}_{fl} = \frac{1}{2}e^{i\theta}\{\tilde{\mathcal{R}}_{as} + \mathcal{R}_{ss} - \mathcal{R}_{aa} - \mathcal{R}_{sa}\}.$$

Выражения (5) и (6) дают общее решение задачи о радиационном распаде двух неподвижных и невзаимодействующих между собой одинаковых атомов, помещенных в один и тот же термостат, действие которого на атомы описывается в марковском приближении. Рассмотрим стационарное решение уравнений (1), (2). Ненулевые элементы двухчастичной матрицы плотности имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg}^{st} &= 1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)}, \quad \mathcal{R}_{ff}^{(0)} = \mathcal{R}_{ll}^{st} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{aa}^{(0)}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{gl}^{st} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{gf}^{st} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)}, \quad (7) \\ \mathcal{R}_{fl}^{st} &= -\frac{1}{2}e^{i\theta}\mathcal{R}_{aa}^{(0)}. \end{aligned}$$

Чтобы определить, является ли стационарное решение (7) перепутанным, воспользуемся критерием Переса-Хородецких [15, 16], состоящем в следующем. Берется двухчастичная матрица плотности, транспонированная по индексам одного из атомов, например второго. Будем называть такую матрицу матрицей Переса-Хородецких. Необходимым условием факторизуемости матрицы плотности является положительность всех собственных значений такой матрицы. Для перепутанных состояний хотя бы одно

собственное значение такой матрицы плотности отрицательное. Например, для перепутанных состояний $|s\rangle$ и $|a\rangle$ обсуждаемое отрицательное собственное значение равно $-1/2$. Значение отрицательного собственного значения матрицы Переса-Хородецкого можно рассматривать как характеристику перепутанного состояния. Стационарная матрица Переса-Хородецкого такова:

$$\mathcal{R}^{P-H st} = \begin{pmatrix} 1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)} & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)*} & -\frac{1}{2}e^{-i\theta}\mathcal{R}_{aa}^{(0)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)*} & \frac{1}{2}\mathcal{R}_{aa}^{(0)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)} & 0 & \frac{1}{2}\mathcal{R}_{aa}^{(0)} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{i\theta}\mathcal{R}_{aa}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения определяются из уравнений

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{aa}^{(0)},$$

$$4\lambda\{\lambda - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{aa}^{(0)}(1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)} - \lambda) + |\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)}|^2\} + \quad (8)$$

$$+ (\lambda - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{aa}^{(0)})\mathcal{R}_{aa}^{(0)2} = 0.$$

Исследование уравнения (8) показывает, что существуют области параметров, когда одно из собственных значений матрицы Переса-Хородецкого отрицательно. Наиболее просто это увидеть в случае, когда в начальный момент времени каждый атом находится в чистом состоянии и характеризуется своей волновой функцией $|\psi^f\rangle$ и $|\psi^l\rangle$. Тогда минимальное собственное значение матрицы Переса-Хородецких равно $\lambda_{\min} = -0.17$ для $|\psi^{f,l}\rangle \sim |0\rangle \pm c|1\rangle$.

Радиационный распад двух атомов в общем термостате приводит также к возникновению атомных корреляций при отсутствии перепутывания. Примером служит распад возбужденного атомного состояния $|1\rangle$. В случае одноатомной системы имеем обычный радиационный распад:

$$\rho_{10}^f = 0, \quad \rho_{11}^f = e^{-\tau}, \quad \rho_{00}^f = 1 - e^{-\tau}. \quad (9)$$

Коллективный распад двух возбужденных атомов описывается выражениями

$$\mathcal{R}_{ss} = 2\tau e^{-2\tau}, \quad \mathcal{R}_{ee} = e^{-2\tau}, \quad \mathcal{R}_{gg} = 1 - (1 + 2\tau)e^{-2\tau},$$

$$\mathcal{R}_{ag} = \mathcal{R}_{aa} = \mathcal{R}_{ae} = \mathcal{R}_{sa} = \mathcal{R}_{se} = \mathcal{R}_{eg} = \mathcal{R}_{sg} = 0 \quad (10)$$

или в переменных g, f, l, e :

$$\mathcal{R}_{ff} = \mathcal{R}_{ll} = \tau e^{-2\tau}, \quad \mathcal{R}_{fl} = e^{i\theta}\tau e^{-2\tau},$$

$$\mathcal{R}_{ef} = \mathcal{R}_{el} = \mathcal{R}_{gl} = \mathcal{R}_{gf} = 0.$$

Здесь в качестве начального условия считалось, что оба атома находились на возбужденном уровне (отличен от нуля только матричный элемент $\mathcal{R}_{ee}^{(0)} = 1$). При этом одночастичная матрица плотности каждого атома эволюционирует по закону:

$$\rho_{11}^f = e^{-2\tau}(1 + \tau), \rho_{00}^f = 1 - (1 + \tau)e^{-2\tau}, \rho_{10}^f = 0. \quad (11)$$

Согласно критерию Переса–Хородецких, состояние (10) не является перепутанным, хотя уравнение для одночастичной матрицы плотности не замкнуто и управляется динамикой двухчастичной матрицы плотности:

$$\widehat{\Gamma} \rho_{11}^f = \rho_{11}^f + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{fl}e^{-i\theta} + \mathcal{R}_{lf}e^{i\theta}),$$

$$\widehat{\Gamma} \rho_{00}^f = -\rho_{00}^f - (e^{-i\theta}\mathcal{R}_{fl} + e^{i\theta}\mathcal{R}_{lf}),$$

$$\widehat{\Gamma} \rho_{10}^f = \rho_{10}^f - \frac{1}{2}e^{i\theta}(\mathcal{R}_{ef} - \mathcal{R}_{lg}).$$

Приведенные примеры показывают, что роль общего термостата в перепутывании атомных состояний сводится к обеспечению существенно различной динамики атомных состояний, различающихся типом симметрии по отношению к перестановкам атомов. Взаимодействие атомов с общим термостатом определяется операторами типа (3), имеющими определенный тип симметрии по отношению к перестановкам атомов. В то же время среди двухатомных состояний имеется как минимум два различных типа состояний ($|s\rangle$ и $|a\rangle$) по отношению к перестановкам атомов, которые по разному участвуют в релаксационной динамике. В простейшем случае один тип состояний ($|a\rangle$) эволюционирует унитарным образом, в то время как динамика второго типа ($|s\rangle$) не унитарна. В результате нарушается баланс представления перепутанного начального состояния через базисные векторы $|s\rangle$ и $|a\rangle$ перепутанного базиса. Поэтому спустя некоторое время атомные состояния оказываются перепутанными. Эта различная динамика может заключаться не только в унитарности и неунитарности эволюции базисных атомных состояний перепутанного базиса, но и в разной скорости их затухания при общей не унитарной эволюции. Распад двух атомов, первоначально заселяющих верхний возбужденный уровень, не приводит к перепутыванию атомных состояний, поскольку начальные состояния характеризуются лишь одним типом симметрии по отношению к перестановке атомов.

В заключение отметим, что вывод данной работы о перепутывании атомных состояний согласуется с недавними результатами об увеличении информационной емкости квантовых каналов связи в условиях действия на них коррелированных шумов [21], если под квантовым каналом понимать одноатомную динамику.

Автор выражает благодарность В. Н. Горбачеву и А. И. Маймистову за полезные дискуссии. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 00-02-17803).

1. С. Я. Килин, Квантовая информация, УФН **169**, 507 (1999).
2. И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).
3. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum optics*, Berlin: Springer, 1995.
4. G. K. Brennen et al. Phys. Rev. Lett. **82**, 1060 (1999).
5. A. Beige et al. J. Mod. Opt. **47**, 401 (2000).
6. I. V. Bargatin, B. A. Grishanin, and V. N. Zadkov, Fortschr. Phys. **48**, 637 (2000).
7. L. M. Duan, J. I. Cirac, P. Zoller, and E. S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **85**, 5643 (2000).
8. B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. S. Polzik, E-print LANL, quant-ph/0106057 (2001).
9. C. P. Yang and G. C. Guo, Physica **A273**, 352 (1999).
10. G. C. Guo and C. P. Yang, Physica **A260**, 173 (1998).
11. В. Н. Горбачев, А. И. Жилиба, А. И. Трубилко, Изв. РАН, сер. физ. **66**, 345 (2002).
12. М. Б. Менский, *Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология*, М.: Физматлит, 2001.
13. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Коперативные явления в оптике*, М.: Наука, 1988.
14. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev et al., *Superradiance: Multiatomic Coherent Emission*, Bristol and Philadelphia: IOP, 1996.
15. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413, (1996).
16. M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. **A223**, 1 (1996).
17. S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P. L. Knight, and V. Vedral, arXiv: quant-ph/0103063 (2001).
18. C. W. Gardiner, *Quantum noise*, Berlin: Springer, 1991, Chapter 5.
19. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear optical waves*, Dordrecht: Kluwer Academic, 1999, Appendix 1.
20. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
21. C. Macchiavello and G. M. Palma, E-print LANL, quant-ph/0107052 (2001).