Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 4, с. 241 – 245 © 2002 г. 25 августа

Самоделение импульса из нескольких колебаний светового поля в нелинейной среде с дисперсией

С. А. Козлов[1], *П. А. Петрошенко*

Институт точной механики и оптики, 197101 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 8 июня 2002 г.

Проанализирована непараксиальная динамика импульсов с малым числом колебаний светового поля в нелинейных средах с дисперсией. Показано, что самовоздействие таких предельно коротких импульсов может приводить к их самоделению.

PACS: 42.65.Jx

Передовые рубежи нелинейной оптики сверхкоротких импульсов сегодня – это исследования самовоздействия импульсов, содержащих лишь несколько колебаний светового поля [1]. Понятие огибающей для таких предельно коротких импульсов (ПКИ) теряет свое физическое содержание. Перестают быть корректными и выводимые в приближении квазимонохроматического излучения привычные для нелинейной оптики уравнения движения огибающих [2, 3]. Теория нелинейного распространения ПКИ в различных средах, которой посвящены уже многие десятки работ, строится обычно на уравнениях, описывающих динамику не огибающей импульса, а непосредственно его поля (см., например, обзоры [4, 5]). В основной части этих публикаций изучаются закономерности нелинейной эволюции поля ПКИ с неизменной поперечной структурой (что предполагается в первом приближении справедливым в волноводах). Изменение поперечного пространственного распределения поля ПКИ (в объемных нелинейных средах) рассматривалось в значительно меньшем числе работ. Обычно они посвящены параксиальной эволюции ПКИ. Например, в [6] сформулирован метод вывода уравнений параксиальной дифракции ПКИ, в [7] приведены уравнения параксиальной динамики поля ПКИ в нелинейной диэлектрической среде с дисперсией, в [8] представлены результаты численного моделирования решений этих уравнений. Однако последовательная теория самовоздействия ПКИ должна быть непараксиальной. При анализе распространения световых образований с продольным размером, соизмеримым с центральной длиной волны, естественно допускать возможность изменений и в поперечной структуре поля на тех же масштабах [8].

Для описания непараксиальной эволюции ПКИ в настоящий работе мы будем использовать спектральный метод анализа. В работе [9] именно такой подход позволил вывести укороченное уравнение непараксиальной самофокусировки монохроматического излучения. В настоящей работе предложенный в [9] спектральный подход обобщен на случай излучения с широким временным спектром. Выведено новое укороченное уравнение, описывающее непараксиальную динамику пространственного спектра ПКИ в однородной изотропной диэлектрической среде с произвольной спектральной зависимостью линейного показателя преломления и нерезонансной электронной нелинейностью. Получены решения этого уравнения, демонстрирующие эффект самоделения ПКИ в процессе самоуширения его спектра.

При описании распространения светового излучения в диэлектрической среде уравнения Максвелла могут быть редуцированы к виду [10]

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля излучения, $\mathbf{P}$ – поляризованность среды, c – скорость света в вакууме, t – время, ∇ – оператор пространственных производных.

В данной статье мы ограничимся скалярной задачей анализа самовоздействия двумерного пучка TE-поляризованного излучения. При этом для определенности будем полагать ось z выделенным направлением, вдоль которого распространяется излучение, x – поперечной координатой, ось y – направлением линейно поляризованного электрического поля излучения. Диэлектрическую среду, в которой распространяется ПКИ, будем полагать однородной и изотропной с произвольной зависимостью от частоты ω линейного показателя преломления $n(\omega)$. Нелинейную часть поляризованности среды будем рассматривать

[1] e-mail: kozlov@phd.ifmo.ru

в простейшем виде $P_{nl} = \chi E^3$, где χ – нелинейная восприимчивость. Такое представление нелинейного отклика диэлектрика в поле ПКИ вполне оправдано в первом приближении при его нерезонансном характере и электронной природе [5]. Практическая безынерционность нерезонансной нелинейности диэлектриков в поле сверхкоротких лазерных импульсов подтверждается слабой дисперсией их коэффициентов нелинейного показателя преломления в значительной части диапазонов прозрачности этих материалов [11]. В указанных предположениях уравнение (1) для частотного спектра излучения

$$G(z,x,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(z,x,t)\, e^{-i\omega t} dt$$

может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} G + \\ + \frac{\chi \omega^2}{\pi c^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega-\alpha)\, G(\alpha-\beta)\, G(\beta)\, d\alpha d\beta = 0. \tag{2}$$

В свою очередь, уравнение (2) для пространственного спектра

$$g(z,k_x,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(z,x,\omega)\, e^{-ik_x x} dx$$

можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} - k_x^2\right) g + \\ + \frac{\chi\omega^2}{4\pi^3 c^2} \int \int\limits_{+\infty}^{-\infty}\!\!\int \int g(k_x - m_x - n_x, \omega-\alpha) \times \\ \times g(m_x, \alpha-\beta)\, g(n_x,\beta)\, dm_x dn_x d\alpha d\beta = 0. \tag{3}$$

Уравнения (2), (3) описывают распространение световых волн как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси z, а также их взаимодействие за счет нелинейности среды. Выведем уравнение однонаправленного распространения излучения.

Линеаризованное уравнение (3) имеет решение

$$g(z,k_x,\omega) = C_1(k_x,\omega)\, e^{-i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1-\frac{k_x^2c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\cdot z} + \\ + C_2(k_x,\omega)\, e^{i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1-\frac{k_x^2c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\cdot z}, \tag{4}$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования. Первое слагаемое описывает дифракцию прямой волны, второе – обратной. Из (4) очевидно, что непараксиальная дифракция прямой волны ($C_2 = 0$) описывается укороченным линейным уравнением

$$\frac{\partial g}{\partial z} + i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1-\frac{k_x^2c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\cdot g = 0. \tag{5}$$

Обобщим уравнение (5) на режим нелинейного распространения излучения. Будем искать нелинейное укороченное уравнение в виде:

$$\frac{\partial g}{\partial z} + i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1-\frac{k_x^2c^2}{\omega^2 n(\omega)}}\cdot g + \chi N(g) = 0, \tag{6}$$

где $N(g)$ – неизвестный нелинейный оператор.

Переход от линеаризованного уравнения (3) к укороченному (с производной по z более низкого порядка) уравнению (5) физически означает переход к анализу дифракции однонаправленной волны. Ясно, что решение укороченного уравнения (5) является и частным решением линеаризованного полного уравнения (3). Для определения вида оператора $N(g)$ в (6) также потребуем, чтобы решения укороченного уравнения (6) являлись и решением полного уравнения (3). В соответствие с методикой, предложенной в [9], продифференцировав (6) по z и выразив $\partial g/\partial z$ через g из этого же уравнения, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial z} + i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1-\frac{k_x^2c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\cdot g + \chi N(g)\right) = \\ = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} - k_x^2\right) g - \\ - i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1-\frac{k_x^2c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\cdot \chi N(g) + \chi\frac{\partial}{\partial z} N(g) = 0. \tag{7}$$

Сопоставив (7) с (3), для оператора $N(g)$ получаем соотношение

$$-i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1-\frac{k_x^2c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\cdot N(g) + \frac{\partial}{\partial z} N(g) = \\ = \frac{\chi\omega^2}{4\pi^3 c^2} \int \int\limits_{+\infty}^{-\infty}\!\!\int \int g(k_x - m_x - n_x, \omega-\alpha) \times \\ \times g(m_x, \alpha-\beta)\, g(n_x,\beta)\, dm_x dn_x d\alpha d\beta. \tag{8}$$

Будем искать $N(g)$ в форме

$$N(g) = \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\int \Phi(k_x, \omega, m_x, n_x, \alpha, \beta) \times$$
$$\times g(k_x - m_x - n_x, \omega - \alpha) g(m_x, \alpha - \beta) \times$$
$$\times g(n_x, \beta) dm_x dn_x d\alpha d\beta, \quad (9)$$

где $\Phi(k_x, \omega, m_x, n_x, \alpha, \beta)$ – неизвестная функция. Тогда, используя тот факт, что с точностью до малых более высокого порядка выполняется

$$\frac{\partial}{\partial z} g(k_x - m_x - n_x, \omega - \alpha) \approx$$
$$\approx -i\frac{(\omega - \alpha) n(\omega - \alpha)}{c}\sqrt{1 - \frac{(k_x - m_x - n_x)^2 c^2}{(\omega - \alpha)^2 n^2 (\omega - \alpha)}} \cdot g,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g(m_x, \alpha - \beta) \approx$$
$$\approx -i\frac{(\alpha - \beta) n(\alpha - \beta)}{c}\sqrt{1 - \frac{m_x^2 c^2}{(\alpha - \beta)^2 n^2 (\alpha - \beta)}} \cdot g,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g(n_x, \beta) \approx -i\frac{\beta n(\beta)}{c}\sqrt{1 - \frac{n_x^2 c^2}{\beta^2 n^2(\beta)}} \cdot g, \quad (10)$$

из соотношения (8) с учетом (9) можно получить

$$\Phi = i \cdot \frac{\omega^2}{4\pi^3 c^3} \cdot \varphi,$$

где

$$\varphi(k_x, \omega, m_x, n_x, \alpha, \beta) =$$
$$= \left(\omega n(\omega)\sqrt{1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}} + \right.$$
$$+ (\omega - \alpha) n(\omega - \alpha)\sqrt{1 - \frac{(k_x - m_x - n_x)^2 c^2}{(\omega - \alpha)^2 n^2(\omega - \alpha)}} +$$
$$+ (\alpha - \beta) n(\alpha - \beta)\sqrt{1 - \frac{m_x^2 c^2}{(\alpha - \beta)^2 n^2(\alpha - \beta)}} +$$
$$\left. + \beta n(\beta)\sqrt{1 - \frac{n_x^2 c^2}{\beta^2 n^2(\beta)}}\right)^{-1}. \quad (11)$$

Таким образом, нелинейное укороченное уравнение, описывающее непараксиальную динамику пространственного спектра однонаправленного излучения, принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial z} + i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}} \cdot g + i\frac{\chi\omega^2}{4\pi^3 c} \times$$
$$\times \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\int \varphi(k_x, \omega, m_x, n_x, \alpha, \beta) g(k_x - m_x - n_x, \omega - \alpha) \times$$
$$\times g(m_x, \alpha - \beta) g(n_x, \beta) dm_x dn_x d\alpha d\beta = 0, \quad (12)$$

где φ описывается соотношением (11).

Уравнение (12) после процедуры (7) с учетом (8)–(11) сводится к полному уравнению (3) с точностью до слагаемых пятого порядка по g (из-за приближения (10)). Она достаточная, поскольку с этой точностью из (1) получены и исходные полные спектральные уравнения (2), (3).

Выведенное уравнение (12) позволяет анализировать нелинейную эволюцию светового излучения, спектр которого, как временной, так и пространственный, может становиться очень широким. Правильное описание явления сверхуширения временного спектра возможно из-за учета в (12) произвольной дисперсии линейного показателя преломления среды и из-за отсутствия существенной дисперсии нерезонансной нелинейности электронной природы в значительной части диапазона прозрачности диэлектриков [11]. Описание с помощью (12) уширения пространственного спектра излучения (например, из-за самофокусировки) возможно до его ширины, сопоставимой с волновым числом. Если в пространственном спектре появляются частоты k_x, большие волнового числа, то в (12) второе слагаемое становится действительным. Этим компонентам пространственного спектра соответствуют экспоненциально изменяющиеся вдоль z поля, аналогичные полям, возникающим при полном внутреннем отражении. При распространении излучения с таким сверхуширенным пространственным спектром следует дополнительно анализировать возможность генерации обратной волны [9, 12].

Приведем приближенное решение выведенного уравнения непараксиальной динамики спектра (12). Используя подстановку

$$g = U(z, k_x, \omega)\exp\left(-i\frac{\omega n(\omega)}{c}\sqrt{1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}} \cdot z\right) \quad (13)$$

и применяя метод последовательных приближений Пикара [13], в первой итерации несложно получить решение (12) вида

$$
\begin{gathered}
U\left(z, k_z, \omega\right)=U_0\left(k_z, \omega\right)+ \\
+\frac{\chi \omega^2}{4 \pi^3} \int \iint_{-\infty}^{+\infty} \int U_0\left(k_x-m_x-n_x, \omega-\alpha\right) \times \\
\times U_0\left(m_x, \alpha-\beta\right) \cdot U_0\left(n_x, \beta\right) \times \\
\times\left\{\exp \left[-i \frac{z}{c}\left(\varphi-\omega n(\omega) \sqrt{1-\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\right)\right]-1\right\} \times \\
\times \varphi^{-1}\left[\varphi-\omega n(\omega) \sqrt{1-\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2 n^2(\omega)}}\right]^{-1} d m_x d n_x d \alpha_x d \beta_x,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где $U_0\left(k_x, \omega\right)$ – пространственно-временной спектр излучения на входе в нелинейную среду (при $z=0$).

На рисунке решение (14) использовано для моделирования нелинейного распространения импульса титан-сапфирового лазера в кварцевом стекле. Входное пространственно-временное распределение ПКИ предполагалось гауссовым

$$
E(x, t)=E_0 e^{-(x / \sigma)^2} e^{-(t / \tau)^2} \cos \left(\omega_0 t\right),
$$

дисперсия кварцевого стекла характеризовалась зависимостью

$$
n(\omega)=N_0+a c \omega^2. \tag{15}
$$

При этом полагали, что $N_0=1.450$; $a c \omega_0^2=0.007$; $\omega_0=2.4 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$; $\tau / T_0=3$, $\sigma / \lambda_0=3$, где $T_0=2 \pi / \omega_0$, $\lambda_0=2 \pi c / \omega_0$; имеющий смысл нелинейной добавки к показателю преломления $3 \pi \chi E_0^2 / 2 n\left(\omega_0\right)=0.0001$ (при значении коэффициента нелинейного показателя преломления кварцевого стекла $n_2=2.9 \cdot 10^{-16} \text{см}^2/\text{Вт}$ эта добавка возникает при пиковой интенсивности $I=0.5 \cdot 10^{12} \text{Вт}/\text{см}^2$).

Хотя решение (14) получено для амплитуды спектра U, на рисунке для удобства восприятия оно иллюстрировано для поля E. Понятно, что для E можно переписать и динамическое уравнение (12), и его приближенное решение (13), (14). Однако для поля они имеют вид гораздо более сложный, чем (12)–(14). Например, линеаризованное уравнение (12) для спектра имеет решение вида тривиального алгебраического соотношения (14), где $U=U_0$, в то время как даже при простой дисперсионной зависимости (15) динамика поля в линейной среде описывается интегралом от функции Эйри [14].

Пространственно-временная динамика электрического поля ПКИ титан-сапфирового лазера в кварцевом стекле $z=0\lambda_0$ (a, a′), $25\lambda_0$ (b, b′), $50\lambda_0$ (c, c′), $75\lambda_0$ (d, d′)

На рисунке приведено аксонометрическое отображение изменения поперечного распределения нормированного поля E/E_0 и его временной динамики с увеличением пройденного в стекле расстояния. Поскольку часть ПКИ, характеризуемая отрицательными значениями поля, сохраняет симметрию части ПКИ с положительными значениями поля, то на рисунке приведены только последние (отрицательные значения поля находятся ниже выведенной плоскости $E=0$ и на рисунке не видны). Дополнительно на рисунке приведены плоскостные изображения пространственно-временного распределения поля (светло-серые полосы соответствуют его положительным значениям, темно-серые – отрицательным), из которых труднее оценить абсолютные значения величины E, но на которых отчетливее видны изменения фазы излучения.

Из рисунка видно, что дисперсионно-дифракционное расплывание ПКИ из-за нелинейности среды сопровождается уширением его спектра. Эффективно генерируются высокочастотные компоненты. Из-за дисперсии они отделяются от "материнского" импульса. Происходит самоделение ПКИ. Аналогом этого эффекта для квазимонохроматических импульсов является классический эффект генерации третьей гармоники. Однако в случае ПКИ спектр "гармоники", как и спектр "материнского" ПКИ, сверхуширен. Поэтому анализ взаимодействия компонент континуумного спектра привычным методом медленно меняющейся огибающей, который основан на приближении квазимонохроматического излучения, становится невозможным. Формирование гантелеобразных световых структур с различным спектральным составом при самофокусировке ПКИ наблюдалось также в работе [8]. Но как процесс самоделения ПКИ этот эффект не интерпретировался. Кроме того, он рассматривался в [8] на границе применимости базового в этой работе параксиального приближения.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена непараксиальная динамика импульсов с малым числом колебаний светового поля в нелинейных средах с дисперсией. Показано, что при анализе самовоздействия излучения с широким пространственным и временным спектрами спектральный подход оказывается более плодотворным, чем полевой. Показано, что уширение спектра ПКИ в нелинейной среде может приводить к самоделению импульса.

Авторы признательны А. Н. Берковскому и Ю. А. Шполянскому за рекомендации по технике иллюстрирования решения (14) и полезные обсуждения.

Работа поддержана CRDF (грант # RP-2249), Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 01-02-17841) и программой Фундаментальных исследований в области естественных наук Минобразования РФ (грант # E00-3.2-290).

---

1. Th. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phis. **72**, 545 (2000).
2. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, М.: Наука, 1988.
3. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, М.: Мир, 1996.
4. А. И. Маймистов, Квантовая электроника **30**, 287 (2000).
5. С. А. Козлов, Вестник молодых ученых, сер. физ. науки, №1, 7 (2000).
6. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **53**, 188 (1991).
7. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
8. А. Н. Берковский, С. А. Козлов, Ю. А. Шполянский, Оптический ж. **69**, №3, 35 (2002).
9. С. А. Изъюров, С. А. Козлов, Письма в ЖЭТФ **71**, 666 (2000).
10. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, М.: Наука, 1990.
11. А. Н. Азаренков, Г. Б. Альтшулер, Н. Р. Белашенков, С. А. Козлов, Квантовая электроника **20**, 733 (1993).
12. M. D. Feit and J. A. Fleck, J. of Optical Society of America **5**, 633 (1988).
13. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, М.: Наука, 1977.
14. Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман, *Разделение частот в теории колебаний и волн*, М.: Наука, 1983.