Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 5, с. 337 – 340 © 2002 г. 10 сентября

Влияние многократного рассеяния на ширину линии параметрического рентгеновского излучения релятивистских электронов в кристалле

Н. Ф. Шульга[1], *М. Табризи*[+]

Институт теоретической физики Национального научного центра "Харьковский физико-технический институт" 61108 Харьков, Украина

[+]*Харьковский национальный университет, 61077 Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 5 августа 2002 г.

Показана значительная роль многократного рассеяния в формировании ширины линии параметрического рентгеновского излучения "назад" релятивистских электронов в кристалле. Предложена теория ширины линии этого излучения, основанная на методе функционального интегрирования. Показано, что задача о влиянии многократного рассеяния на параметрическое рентгеновское излучение аналогична задаче об эффекте Ландау–Померанчука–Мигдала влияния многократного рассеяния на тормозное излучение электронов большой энергии в аморфной среде.

PACS: 11.80.La, 31.15.Kb, 32.70.Jz, 33.70.Jg

1. Параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) релятивистских электронов возникает при падении частиц под малым углом к одной из кристаллографических плоскостей атомов кристалла (см. последние обзоры [1, 2] и ссылки в них). Это излучение сконцентрировано, в основном, под направлениями, близкими к брэгговским углам отражения поля частицы от этих плоскостей. Особый интерес представляет ПРИ "назад" при падении частиц на кристалл под малым углом к одной из его кристаллографических осей (оси z), так как в этом случае значительно ослабляются вклады других видов излучения, таких как тормозное и когерентное излучение. В этом случае в результате интерференции волн, отраженных от кристаллических плоскостей атомов, расположенных ортогонально оси z, появляются узкие линии в спектрально-угловой плотности излучения. Естественная ширина этих линий определяется числом плоскостей атомов кристалла, с которыми взаимодействует электрон. Экспериментальные исследования ширин линий ПРИ "назад" были проведены недавно на ускорителе MAMI (г. Майнц , Германия) при энергиях электронов 855 МэВ [3]. Измеренные значения ширин линий, однако, оказались значительно большими, чем естественная ширина линии ПРИ.

В настоящей работе показано, что существенную роль в формировании ширины линии ПРИ играет многократное рассеяние частиц в кристалле. Получены формулы, описывающие влияние многократного рассеяния на ширину линии ПРИ. Процедура усреднения спектрально-угловой плотности излучения ПРИ проведена на основе метода функционального интегрирования. Показано, что с математической точки зрения данная задача аналогична задаче об эффекте Ландау–Померанчука–Мигдала (ЛПМ) влияния многократного рассеяния на тормозное излучение электронов ультравысокой энергии в аморфной среде.

2. Для нахождения спектрально-угловой плотности излучения релятивистского электрона, движущегося по траектории $\mathbf{r}(t)$ в среде с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_\omega(\mathbf{r}) = 1 + \epsilon'_\omega(\mathbf{r})$, требуется знать фурье-компоненту по времени вектора электрического поля частицы $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$. Эта величина определяется уравнением [4]

$$(\Delta + \omega^2)E_{\omega,i} - \nabla_i\nabla_k E_{\omega,k} = -4\pi i\omega j_{\omega,i} - \omega^2\epsilon'_\omega(\mathbf{r})E_{\omega,i}, \quad (1)$$

где $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})$ – фурье-компонента вектора плотности тока частицы:

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = e\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t)), \quad (2)$$

и $\mathbf{v}(t)$ – скорость частицы.

Используя метод функций Грина, можно показать, что спектрально-угловая плотность излучения имеет следующий вид:

[1] e-mail: shulga@kipt.kharkov.ua

$$\frac{dE}{d\omega\, do} = = \frac{1}{4\pi^2}\left|\mathbf{k}\times\int d^3r e^{-i\mathbf{kr}}(4\pi i\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})+\omega\epsilon'_\omega(\mathbf{r})\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}))\right|^2, \tag{3}$$

где $\mathbf{k}$ – волновой вектор в направлении излучения ($|\mathbf{k}|=\omega$) (мы пользуемся системой единиц, в которой скорость света принята равной единице).

Первое слагаемое в (3) определяет вклад в излучение, обусловленный изменением траектории частицы во внешнем поле. Оно не зависит от $\epsilon'_\omega(\mathbf{r})$. Для релятивистского электрона это слагаемое вносит основной вклад в области углов излучения, близких к направлению скорости частицы $\mathbf{v}(t)$. При рассмотрении ПРИ "назад" вкладом этого слагаемого в излучение можно пренебречь. Второе слагаемое в (3) отлично от нуля только в области координат, где отлична от нуля величина $\epsilon'_\omega(\mathbf{r})$. Поэтому для нахождения вклада в излучение, обусловленного неоднородностью диэлектрической проницаемости среды, требуется знать поле $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ только в области координат, где $\epsilon'_\omega(\mathrm{r}) \neq 0$. В простейшем случае, когда величина $\epsilon'_\omega(\mathbf{r})$ мала, решение уравнения (1) можно искать в виде разложения по $\epsilon'_\omega(\mathbf{r})$. Первый член такого разложения не зависит от $\epsilon'_\omega(\mathbf{r})$ и представляет собой поле частицы $\mathbf{E}^0_\omega(\mathbf{r})$, движущейся в вакууме по траектории $\mathbf{r}(t)$. Подставляя это выражение для $\mathbf{E}^0_\omega(\mathbf{r})$ в (3) и используя фурье-разложение величин $\mathbf{E}^0_\omega(\mathbf{r})$ и $\epsilon'_\omega(\mathbf{r})$, получим следующее выражение для спектрально-угловой плотности излучения:

$$\frac{dE}{d\omega\, do} = \frac{e^2\omega^4}{4\pi^2}\left|\mathbf{k}\times\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{\epsilon'_{\omega,\mathbf{q}}}{\omega^2-(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\times \times\left\{\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\frac{1}{\omega^2}(\mathbf{k}-\mathbf{q})\left[(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}-\mathbf{q}}\right]\right\}\right|^2, \tag{4}$$

где $\mathbf{j}_{\omega,k-q}$ – фурье-компонента по координатам вектора плотности тока частицы:

$$\mathbf{j}_{\omega,q} = e\int_{-\infty}^{\infty} dt\mathbf{v}(t)\exp\left[i(\omega t-\mathbf{qr}(t)\right]. \tag{5}$$

При падении релятивистского электрона на кристалл под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей (оси z) основной вклад в ПРИ "назад" вносят компоненты $q_x = q_y = 0$. Для излучения в этом случае несущественна неоднородность диэлектрической проницаемости вдоль осей x и y кристалла, ортогональных оси z. При этом с учетом периодичности диэлектрической проницаемости вдоль оси z для нахождения интенсивности излучения можно воспользоваться следующим выражением для $\epsilon'_{\omega,\mathbf{q}}$:

$$\epsilon'_{\omega,\mathbf{q}} = (2\pi)^2\delta(\mathbf{q}_\perp)\epsilon_{\omega,q_z}\frac{1-\exp(-iNaq_z)}{1-\exp(-iaq_z)}, \tag{6}$$

где $\delta(\mathbf{q}_\perp)$ – двумерная дельта-функция, $\mathbf{q}_\perp = (q_x, q_y)$, a – расстояние между кристаллическими плоскостями атомов вдоль оси z, N – число этих плоскостей и

$$\epsilon_{\omega,q_z} = \int_0^a dz\epsilon_\omega(z)\exp(-iq_z z). \tag{7}$$

Функция (6) содержит резкие максимумы при значениях $q_z = g$, где $g = 2\pi n/a$ и n – целые числа. Этим значениям g при $N\to\infty$ и прямолинейном движении частицы в кристалле соответствуют линии ПРИ $\omega_n = \nu g\cos\psi(1+\nu\cos\theta)^{-1}$, где $\psi = (\psi_x, 0)$ – угол между $(-\mathbf{v})$ и $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, 0)$ – угол, под которым происходит излучение (мы будем интересоваться излучением в плоскости (x,z) в области углов θ_x, близких к направлению брэгговского отражения волн).

Многократное рассеяние будет приводить к небольшим отклонениям вектора скорости частицы относительно начального направления движения $\mathbf{v}$. С учетом этих малых отклонений вектор скорости $\mathbf{v}(t)$ может быть записан в виде

$$\mathbf{v}(t)\approx\mathbf{v}\left(1-\frac{\mathbf{v}_\perp^2(t)}{2}\right)+\mathbf{v}_\perp(t), \tag{8}$$

где $\mathbf{v}_\perp(t)\cdot\mathbf{v} = 0$ и $|\mathbf{v}_\perp| \ll |\mathbf{v}_\perp|$. При этом будет изменяться среднее расстояние, проходимое частицей между ее последовательными столкновениями с плоскостями атомов кристалла, что, в свою очередь, будет приводить к уширению линии ПРИ. К уширению линии будет приводить также учет конечного числа плоскостей атомов кристалла, с которыми взаимодействует частица.

Рассмотрим излучение вблизи одной из линий ПРИ $\omega = \omega_n$ с учетом влияния на ширину линии толщины кристалла $L = Na$ и многократного рассеяния частиц в кристалле. Выполнив в (4) замену переменной $q_z \to g + q'_z$, легко проверить, что характерные значения q'_z, вносящие основной вклад в ПРИ вблизи интересующей нас линии, по порядку величины будут равны $a_{z\mathrm{eff}} \sim 1/Na$. При этом с точностью до членов порядка $1/N$ можно получить следующее выражение для спектрально-угловой плотности ПРИ вблизи линии, соответствующей частоте ω_n:

$$\frac{dE}{d\omega\, do} = \frac{e^2\omega_n^2}{4\pi^2a^2}|\epsilon_{\omega_n,g}|^2\times \tag{9}$$

$$\times\left|\int_0^L dt e^{2i(\omega-\omega_n)t}\frac{\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi}-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}}}{\gamma^{-2}+(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi})^2-\dfrac{2i}{\omega_n}\dfrac{\partial}{\partial t}}\Phi(\mathbf{v}_\perp(t))\right|^2_{\mu\to 0},$$

где $\Phi(\mathbf{v}_\perp(t))$ – функция, определяющая влияние многократного рассеяния на ПРИ:

$$\Phi(\mathbf{v}_\perp(t)) = \exp\left\{\boldsymbol{\mu}\mathbf{v}_\perp(t) + \frac{i\omega_n}{2}\int\limits_0^t dt'\mathbf{v}_\perp^2(t') + \right.$$

$$\left. + i\omega_n(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\psi})\int\limits_0^t dt'\mathbf{v}_\perp(t')\right\}. \qquad (10)$$

Входящая в (10) величина $\mathbf{v}_\perp(t)$ представляет собой случайное значение угла рассеяния частицы в момент времени t, связанное с ее многократным рассеянием в кристалле. Формула (9) должна быть усреднена по этим случайным значениям углов рассеяния. Существенной особенностью процесса рассеяния релятивистского электрона в кристалле при падении пучка под малым углом ψ к кристаллографической оси z является то, что рассеяние частиц происходит в основном вдоль азимутального угла φ в плоскости, ортогональной оси z [5]. В результате многократного рассеяния на цепочках атомов кристалла, расположенных параллельно оси z, происходит перераспределение частиц по этому углу. При этом, если $\psi \gg \psi_c$, где ψ_c – критический угол осевого каналирования, то процесс многократного рассеяния на цепочках атомов кристалла представляет собой гауссов процесс со средним значением квадрата угла многократного рассеяния $\overline{\vartheta^2} = qL$, отличающимся от соответствующего значения квадрата угла многократного рассеяния частиц в аморфной среде коэффициентом порядка $R/4\psi d$, где R – радиус Томаса–Ферми экранировки потенциала отдельного атома кристалла и d – расстояние между атомами вдоль оси z [5]. Учитывая, что функционал (9), который подлежит усреднению, также имеет гауссов вид, для проведения процедуры усреднения можно воспользоваться методом функционального интегрирования [6]. В простейшем случае, когда $(\theta - \psi)^2 \gg qL$, можно пренебречь в (9) зависимостью предэкспоненциального множителя от случайной величины $\nu_\perp(t)$. Такая зависимость в (9) появляется в результате действия дифференциальных операторов на функционал $\Phi(\mathbf{v}_\perp(t))$. Выделив в (9) часть, подлежащую усреднению, получим с учетом того, что рассеяние частиц в рассматриваемом случае происходит в основном вдоль оси y, следующее выражение для спектрально-угловой плотности ПРИ "назад" :

$$\frac{dE}{d\omega\, do} = \frac{e^2\omega_n^2|\epsilon_{\omega_n,g}|^2}{4\pi^2 a^2}\frac{(\theta-\psi)^2}{\gamma^{-2} + (\theta-\psi)^2]}L^2 F(L, \omega - \omega_n), \qquad (11)$$

где

$$F = (L, \omega - \omega_0) = \qquad (12)$$

$$= \frac{2}{L^2}\mathrm{Re}\int\limits_0^L dt\int\limits_0^t dt' e^{2i(\omega-\omega_n)(t-t')}\langle\Phi(\nu_\perp(t))\cdot\Phi^*(\nu_\perp(t'))\rangle,$$

$$\langle\Phi(\nu_\perp(t))\cdot\Phi^*(\nu_\perp(t'))\rangle =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\cdots\int\frac{d\nu_1\ldots d\nu_N}{(\pi q\Delta)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{\nu_1^2}{q\Delta} - \cdots - \right.$$

$$\left. - \frac{(\nu_N - \nu_{N-1})^2}{q\Delta} - \frac{i\nu g\Delta}{4}\sum_{n=k}^N \nu_n^2\right\}. \qquad (13)$$

Здесь $t = N\Delta$, $t' = k\Delta$, ν_n – значение угла рассеяния в момент времени $t_n = n\Delta$.

Функциональный интеграл (13) имеет ту же структуру, что и соответствующий интеграл в теории эффекта ЛПМ влияния многократного рассеяния на тормозное излучение электронов большой энергии в аморфной среде [7, 8]. Поэтому для вычисления (13) можно воспользоваться методом, развитым в [7] для описания эффекта ЛПМ. В результате находим, что

$$\langle\Phi(\nu_\perp(t))\cdot\Phi^*(\nu_\perp(t'))\rangle =$$

$$= \left(1 + \frac{i\omega_n(t-t')qt'}{2} + \frac{\omega_n^2 q^2(t-t')^3 t'}{12}\right)^{-1/2}. \qquad (14)$$

Выделив в (12) и (14) размерные величины, запишем функцию F в виде

$$F = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x du e^{2iL(\omega-\omega_n)u}\times$$

$$\times\left(1 + i\sigma u(x-u) + \frac{\sigma^2}{3}u^3(x-u)\right)^{-1/2}, \qquad (15)$$

где $\sigma \equiv \omega_n qL^2/2$, $x = t/L$, и $u = (t-t')/L$. Эта формула показывает, что влияние многократного рассеяния на ПРИ "назад" определяется параметром σ. Если $\sigma \ll 1$, то влиянием многократного рассеяния на ПРИ можно пренебречь. При этом функция $F = F_0$ определяет естественную ширину линии ПРИ :

$$F_0 = \frac{\sin^2(\omega-\omega_n)L}{((\omega-\omega_n)L)^2}. \qquad (16)$$

Согласно (16), ширина линии по порядку величины равна $\Delta\omega \sim 1/L$.

Если $\sigma \gg 1$, то характерные значения u_{eff} в (15) по порядку величины равны $u_{\text{eff}} \sim (3/\sigma^2)^{1/3}$. При этом ширина линии будет определяться соотношением

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{L}\left(\frac{\sigma^2}{3}\right)^{1/3}. \qquad (17)$$

Таким образом, при $\sigma \gg 1$ многократное рассеяние приводит к значительному уширению линии ПРИ по сравнению с естественным ее значением. В условиях эксперимента [3], когда электроны с энергией 855 МэВ падают на кристалл кремния толщиной 525 мкм под углом $\psi = 5$ мрад к его оси $< 111 >$, величина σ для линии, соответствующей значению $g = 2\pi/a$ составляет $\sigma \sim 75$. Многократное рассеяние в этом случае приводит к значительному уширению линии (более чем на порядок) по сравнению с естественной шириной линии ПРИ.

Один из авторов (Н.Ф.Ш.) выражает благодарность профессору Х.Баке из университета г. Майнц за обсуждение проблем, связанных с измерением и интерпретацией ультраузких линий ПРИ.

1. М. Л. Тер-Микаелян, УФН **171**, 579 (2001).
2. P. Rullhusen, X. Artru, and P. Dhez, *Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons*, World Scientific Publishing Co.Ptl.Ltd., Singapur, 1998.
3. H. Backe, G. Kube, and W. Lanth, *Electron-Photon Interaction in Dense Media*, Ed. H. Wiedemann, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 2001, p. 153–181.
4. Г. М. Гарибян, Ян Ши, *Рентгеновское переходное излучение*, Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1983.
5. А. И. Ахиезер, Н. Ф. Шульга, *Электродинамика высоких энергий в веществе*, М.: Наука, 1993.
6. И. М. Гельфанд. А. М. Яглом, УМН **11**, 77 (1956).
7. Н. В. Ласкин, А. С. Мазманишвили, Н. Н. Насонов, Н. Ф. Шульга, ЖЭТФ **89**, 763 (1985).
8. Н. В. Ласкин, А. И. Жуков, ЖЭТФ **98**, 571, (1990).