

Критический ток в системе, состоящей из двух сверхпроводников, соединенных коротким мостиком малого диаметра из нормального металла (SNS)

Ю. Н. Овчинников⁺*, А. И. Ларкин^{+□}

⁺Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 119940 Москва, Россия

*Max-Planck Institute for Physics of Complex System, D-01187 Dresden, Germany

□Theoretical Physical Institute, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455

Поступила в редакцию 31 июля 2002 г.

После переработки 6 августа 2002 г.

Показано, что в системе сверхпроводник-сужение из нормального металла – сверхпроводник возможна реализация состояний с приращением фазы $\delta\varphi > \pi$. При выполнении условий $a \ll l \ll \xi(0)$, где a – поперечный размер сужения, l – длина сужения, $\xi(0)$ – корреляционный радиус при нулевой температуре, существует область параметров $(a, l, \xi(0), T)$, в которой критический ток достигается на решениях с разностью фаз $\delta\varphi > \pi$.

PACS: 74.50.+g

Исследованию сверхпроводящих систем, содержащих “узкое место” для протекания тока, посвящено большое число работ [1–6]. Наиболее простой из них является система SIS (сверхпроводник, изолятор, сверхпроводник). Такие системы (джозефсоновский контакт) широко используются, и теория как стационарных, так и нестационарных явлений в них была создана еще в конце 60-х годов [1–5]. Системы сверхпроводник – сужение из нормального металла – сверхпроводник являются более сложными и теория нестационарных явлений в них не может считаться завершенной. На простейшем примере: сверхпроводник – короткий мостик из “грязного” нормального металла – сверхпроводник мы покажем, что даже проблема критического тока не была решена корректно. Это обстоятельство, по-видимому, частично связано с успехами теории в системах SIS. Одна из первых работ, в которой рассматривалась система S-сужение из нормального металла – S, была сделана в 1975 г. [7]. Система сверхпроводник – сужение из того же материала – сверхпроводник была рассмотрена в работе [8]. В обеих работах, в частности, был найден ток как функция разности фаз в интервале $[-\pi, \pi]$. Ниже мы рассмотрим системы сверхпроводник – сужение из грязного нормального металла – сверхпроводник и найдем в ней зависимость тока от разности фаз в широкой области по разности фаз. Как будет показано ниже, вполне реализуема ситуация, при которой критический ток достигается при разности фаз много больше, чем π по

параметру $(\xi(0)/l) (\Delta/T_c)$, где l – длина мостика, a – поперечный размер мостика, Δ – параметр порядка в сверхпроводнике. Длина мостика предполагается много меньшей, чем $(D/\pi T_c)^{1/2}$, где T_c – температура перехода в сверхпроводящих берегах. Для простоты предполагается, что контакт симметричный, и прозрачность на границе SN равна единице, что позволит использовать простейшие граничные условия: непрерывность функций Грина и их производной на границах раздела. В “грязном” пределе уравнения для функций Грина α, β сверхпроводника имеют вид [9, 10]

$$\alpha \Delta - \beta \omega + \frac{D}{2} \left(\alpha \partial_-^2 \beta - \beta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \right) = \alpha \beta \Gamma, \quad \alpha^2 + \beta \beta^* = 1, \quad (1)$$

где $D = \nu l_{tr}/3$ – коэффициент диффузии, $\partial_- = \partial/\partial \mathbf{r} - 2ie\mathbf{A}$, \mathbf{A} – векторный потенциал, $\Gamma = \tau_s^{-1}$ – время пробега электрона с переворотом спина.

Константа связи в мостике равна нулю и, следовательно, $\Delta = 0$. Предполагается также, что $\Gamma = 0$, $\mathbf{A} = 0$. Плотность тока j выражается через функцию Грина β и равна

$$j = -ie\nu D 2\pi T \sum_{\omega > 0} (\beta^* \partial_- \beta - \beta \partial_+ \beta^*), \quad (2)$$

где $\nu = mp/2\pi^2$ – плотность состояний на поверхности Ферми. Положим

$$\alpha = \sin \theta, \quad \beta = \cos \theta \exp(i\varphi). \quad (3)$$

Внутри мостика из нормального металла уравнение (1) сводится к системе из двух уравнений, одно из которых

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos^2 \theta \right) = 0 \quad (4)$$

есть следствие закона сохранения тока. Решение уравнения (4) есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{A}{\cos^2 \theta}, \quad (5)$$

где $A \equiv A(\omega)$ – константа интегрирования. Используя соотношение (4), приведем второе из уравнений к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \omega \sin \theta + \frac{D}{4} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{A^2}{\cos^2 \theta} \right] \right\} = 0. \quad (6)$$

Тем самым в системе уравнений (1) имеется два интеграла движения. Из уравнения (6) находим

$$\frac{\partial \sin \theta}{\partial x} = \pm \left\{ \left[B^2 - A^2 - \frac{4\omega}{D} \sin \theta \right] - \left(B^2 - \frac{4\omega}{D} \sin \theta \right) \sin^2 \theta \right\}^{1/2}, \quad (7)$$

где B – вторая константа интегрирования. В общем случае уравнение (7) решается в эллиптических функциях. В нашем случае короткого мостика величины $\{A, B\}$ велики. И в этом случае из уравнения (7) находим функцию $\sin \theta$:

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - Z^2} \cos \left(Bx - \frac{Bl}{2} + \gamma \right), \quad (8)$$

где $Z = A/B$, γ – константа интегрирования. Для симметричного контакта константа

$$\gamma = 0. \quad (9)$$

Разность фаз $\delta\varphi$ двух сверхпроводников в предположении, что существенна лишь область сужения, находится из уравнения (5)

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= A \int_0^l \frac{dx}{\cos^2 \theta} = \\ &= Z \int_0^{2Bl} \frac{dy}{(1 + Z^2) - (1 - Z^2) \cos(y - Bl)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Величина Bl есть функция двух переменных: $(\delta\varphi, Z)$. При фиксированном значении Z из уравнения (10) получаем

$$\frac{\partial(Bl)}{\partial(\delta\varphi)} = \frac{(1 + Z^2) - (1 - Z^2) \cos(Bl)}{2Z}. \quad (11)$$

Из этого уравнения следует, что величина Bl при фиксированном значении Z является однозначной, монотонно растущей функцией переменной $\delta\varphi$.

Вычисляя интеграл в формуле (10), находим

$$\delta\varphi = 2 \operatorname{Arctg} \left[\frac{1}{Z} \operatorname{tg} \left(\frac{Bl}{2} \right) \right]. \quad (12)$$

В области градиентов фазы, пока плотность тока не слишком велика, можно воспользоваться граничным условием непрерывности функции α на границе сверхпроводник – нормальный металл, используя для α невозмущенное значение в сверхпроводнике

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} = \pm \sqrt{1 - Z^2} \cos \left(\frac{Bl}{2} \right). \quad (13)$$

Из уравнений (12), (13) находим

$$Z = \frac{\Delta}{(\omega^2 + \Delta^2)^{1/2}} \frac{|\cos(\frac{\delta\varphi}{2})|}{\left(1 - \frac{\Delta^2}{\omega^2 + \Delta^2} \sin^2 \left(\frac{\delta\varphi}{2} \right) \right)^{1/2}}, \quad (14)$$

$$\cos \left(\frac{Bl}{2} \right) = \pm \left(1 - \frac{\Delta^2}{\omega^2 + \Delta^2} \sin^2 \left(\frac{\delta\varphi}{2} \right) \right)^{1/2}. \quad (15)$$

При прохождении разностью фаз $\delta\varphi$ точек $\pi(2N + 1)$ (N – целое число) функция Bl имеет разрывы. Величина скачка $\delta(Bl/2)$ равна

$$\delta \left(\frac{Bl}{2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \right) \right). \quad (16)$$

Величина Bl является нечетной функцией разности фаз $\delta\varphi$. На рисунке приведена схематическая зависимость величины $Bl/2$ от аргумента $\delta\varphi$. Общее решение уравнения (10) для величины $Bl/2$ можно записать в виде

$$\frac{Bl}{2} = \pi N + \operatorname{arctg} \left(Z \operatorname{tg} \left(\frac{\delta\varphi}{2} \right) \right), \quad (17)$$

где N – номер скачка.

Плотность тока в контакте определяется формулой (2) и равна

$$\begin{aligned} j &= \frac{e\nu D}{l} 8\pi T \sum_{\omega > 0} \Delta \frac{|\cos(\frac{\delta\varphi}{2})|}{(\omega^2 + \Delta^2 \cos^2(\frac{\delta\varphi}{2}))^{1/2}} \times \\ &\times \left[\pi N + \operatorname{arctg} \left(\frac{\Delta |\cos(\frac{\delta\varphi}{2})|}{(\omega^2 + \Delta^2 \cos^2(\frac{\delta\varphi}{2}))^{1/2}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\delta\varphi}{2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

При $N \neq 0$ главный вклад в плотность тока возникает от первого слагаемого в квадратных скобках формулы (18). С логарифмической точностью при $N \neq 0$ находим

$$j = \frac{8\pi e\nu D}{l} N \Delta \left| \cos\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) \right| \cdot \ln\left(\frac{\pi^2 N^2 D}{l^2 \max(\pi T, \Delta)}\right). \quad (19)$$

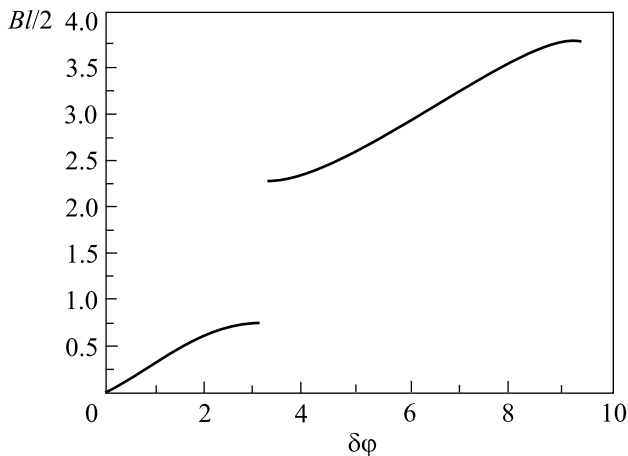
Проводимость σ “грязного” металла равна

$$\sigma = 2\nu D e^2. \quad (20)$$

Используя выражение (20), запишем полный ток I через контакт в виде

$$I = \frac{2\pi}{eR} \Delta N \left| \cos\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) \right| \cdot \ln\left(\frac{\pi^2 N^2 D}{l^2 \max(\pi T, \Delta)}\right), \quad (21)$$

где R – сопротивление сужения в нормальном состоянии. Увеличение тока через сужение приводит к росту N вплоть до N_{cr} . Критическое значение N_{cr} находится из условия, что плотность тока становится столь велика, что подавляет параметр порядка Δ сверхпроводника вблизи сужения. При $N \sim N_{cr}$ выражение (21) для тока через контакт перестает быть справедливым.



Зависимость величины $Bl/2$ от разности фаз $\delta\varphi$

Найдем величину N_{cr} и ток через контакт при $N \sim N_{cr}$. Воспользуемся для этого более простой моделью, в которой слабой связью является шейка гиперболоида вращения [8]. Координаты точек гиперболоида задаются ортогональными криволинейными координатами $\{u, v, \psi\}$ [11]

$$\begin{aligned} x &= a \sin u \operatorname{ch} v \cos \psi, \\ y &= a \sin u \operatorname{ch} v \sin \psi, \\ z &= a \cos u \operatorname{sh} v, \end{aligned} \quad (22)$$

где $0 \leq u < u_s$. Поверхность гиперболоида, как следует из формул (22), задается уравнением

$$u = u_s. \quad (23)$$

Предположим, что длина свободного пробега электронов $l_{tr} \ll au_s$, а параметр $a \ll \xi(0)$. При выполнении этих условий функции $\{\theta, \varphi\}$ зависят лишь от одной координаты v . Из уравнения (1) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cos^2 \theta \right) &= \\ &= \frac{1}{a^2 \operatorname{ch} v (\cos^2 u \operatorname{ch}^2 v + \sin^2 u \operatorname{ch}^2 v)} \times \end{aligned} \quad (24)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{ch} v \cos^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0.$$

Решение уравнения (24) есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{A}{\operatorname{ch} v \cos^2 \theta}, \quad (25)$$

где A – константа интегрирования. Используя уравнение (25) и условие $a \ll \xi(0)$, приведем уравнение (1) для функции θ к виду, справедливому для всех значений v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left[\operatorname{ch}^2 v \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 + \frac{A^2}{\cos^2 \theta} \right] + \\ + \frac{4a^2}{D} \operatorname{ch}^4 v \left[\omega \frac{\partial \sin \theta}{\partial v} + \Delta \frac{\partial \cos \theta}{\partial v} \right] = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

В области, где велики градиентные члены, следует оставить лишь первый член уравнения (26). Это уравнение легко решается и с учетом симметрии $v \rightarrow -v$ решение имеет вид

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}} \cos \left[B(\operatorname{arctg}(e^v) - \operatorname{arctg}(e^{-v})) \right]. \quad (27)$$

Изменение фазы $\delta\varphi$ при переходе через узкое горло гиперболоида определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \\ &= 2A \int_0^\infty \frac{dv}{\operatorname{ch} v \left[1 - \left(1 - \frac{A^2}{B^2} \right) \cos^2 \left(B(\operatorname{arctg}(e^v) - \operatorname{arctg}(e^{-v})) \right) \right]} = \\ &= 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{B}{A} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi B}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Решение уравнения (28) можно представить в виде

$$\frac{\pi B}{2} = \pi N + \operatorname{arctg} \left(\frac{A}{B} \operatorname{tg} \left(\frac{\delta \varphi}{2} \right) \right). \quad (29)$$

В области $v \gg 1$ удобно перейти к сферическим координатам, положив

$$\rho = a \operatorname{ch} v. \quad (30)$$

Уравнение (26) при этом принимает вид

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) + \frac{2}{D} (\omega \cos \theta - \Delta \sin \theta) = 0. \quad (31)$$

На расстояниях $\rho \gg a$ уравнение (31) можно решать по теории возмущений. В этой области положим

$$\theta = \theta_0 + \theta_1; \quad \Delta = \Delta_0 + \Delta_1, \quad (32)$$

где Δ_0 – значение параметра порядка в сверхпроводнике на больших расстояниях от сужения, $\sin \theta_0 = \omega(\omega^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}$. Величина θ_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} - \frac{2}{D} \sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2} \theta_1 - \frac{2}{D} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} \Delta_1 = 0. \quad (33)$$

Полагая

$$\theta_1 = \Phi / \rho, \quad (34)$$

приведем уравнение (33) к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \kappa^2 \Phi = \frac{2}{D} \frac{\omega \rho}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} \Delta_1, \quad (35)$$

где

$$\kappa = \left(\frac{2}{D} \sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2} \right)^{1/2}. \quad (36)$$

Решение уравнения (35), удовлетворяющее граничным условиям при $\rho \rightarrow \infty$, дается выражением

$$\begin{aligned} \Phi = & - \frac{\omega}{\kappa D \sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} \times \\ & \times \exp(\kappa \rho) \int_{\rho}^{\infty} d\rho_1 \rho_1 \Delta_1(\rho_1) \exp(-\kappa \rho_1) - \exp(-\kappa \rho) \times \\ & \times \left[C_2 + \frac{\omega}{\kappa D \sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} \int_a^{\rho} d\rho_1 \rho_1 \Delta_1(\rho_1) \exp(\kappa \rho_1) \right], \quad (37) \end{aligned}$$

где C_2 – константа интегрирования.

Сшивая решение (27) с решением уравнений (31), (34) в промежуточной области $a \ll \rho \ll \xi$, получим значение коэффициента C_2 и одно уравнение на свободные параметры в решении (27):

$$\begin{aligned} C_2 = & - \frac{\omega}{2\Delta_0 \kappa} \pm \frac{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}}{2\Delta_0 \kappa} \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}} \times \\ & \times \left[\cos \left(\frac{\pi B}{2} \right) - \kappa a B \sin \left(\frac{\pi B}{2} \right) \right], \quad (38) \\ & \pm \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}} \left[\cos \left(\frac{\pi B}{2} \right) + \kappa a B \sin \left(\frac{\pi B}{2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} - \frac{2\Delta_0 \omega}{D(\omega^2 + \Delta_0^2)} \int_0^{\infty} d\rho_1 \rho_1 \Delta_1(\rho_1) e^{-\kappa \rho_1}.$$

При получении формул (38) нами было использовано выражение для функции $\sin \theta$ в области $a \ll \rho \ll \xi$, следующее из уравнения (27)

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}} \cos \left(\frac{\pi B}{2} - \frac{aB}{\rho} \right). \quad (39)$$

Поправка Δ_1 к параметру порядка удовлетворяет уравнению

$$2\pi T \sum_{\omega > 0} \left(\frac{\Delta_1}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} \frac{\Phi}{\rho} \right) = 0. \quad (40)$$

Плотность тока в гиперболоиде определяется выражением

$$j = e\nu D 4\pi T \sum_{\omega > 0} \cos^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} = e\nu D 4\pi T \sum_{\omega > 0} \frac{A}{a \cos u}. \quad (41)$$

Интегрируя это выражение по поверхности $\{v = 0, u < u_s\}$, получим значение полного тока I через контакт:

$$I = \frac{2\pi^2}{eR} T \sum_{\omega > 0} A(\omega), \quad (42)$$

где R – сопротивление гиперболоида в нормальном состоянии:

$$R = \frac{1}{4a\sigma \sin^2(u_s/2)}. \quad (43)$$

При $N = 0$ уравнения (29), (38), (42) приводят к результату, полученному в работе [12]. Однако критический ток при $a \ll \xi$ достигается не на $N = 0$, а при

больших значениях N . В области $N \geq 1$ из уравнений (29), (38) находим

$$A = 2NZ, \quad Z = \frac{\Delta_0}{\omega} \left| \cos\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) \right|, \quad (44)$$

где частота ω лежит в интервале

$$\Delta_0 < \omega < \omega_{cr}(N). \quad (45)$$

Значение предельной частоты $\omega_{cr}(N)$ может быть оценено с помощью формулы (38) из условия, что поправочные члены становятся того же порядка, что и основные:

$$\omega_{cr}(N) \approx \Delta_0 \left(\frac{1}{aN \left| \cos\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) \right|} \sqrt{\frac{D}{\Delta_0}} \right)^{2/3}. \quad (46)$$

Из формул (42), (43), (45) находим зависимость полного тока через сужение как функцию параметра N :

$$I = \frac{4\pi\Delta_0 N}{3eR} \times \left| \cos\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) \right| \ln \left[\left(\frac{\Delta_0}{\pi T_c} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{D}{\Delta_0}} \frac{1}{aN \left| \cos\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) \right|} \right]. \quad (47)$$

Эта формула (47) позволяет найти величину критического тока I_{cr} с точностью до численного множителя порядка единицы

$$I_{cr} = \frac{\Delta_0}{eRa} \sqrt{\frac{D}{\Delta_0}} \left(\frac{\Delta_0}{\pi T_c} \right)^{3/2}. \quad (48)$$

По параметру $\xi(0)/a$ критический ток I_{cr} превышает значение, полученное в работе [12].

При получении выражения (48) для критического тока контакта I_{cr} нами было использовано приближение сильной грязи. Это условие означает, что длина свободного пробега электронов l_{tr} должна быть меньше всех характерных длин задачи. В частности, должны выполняться условия

$$l_{tr} \ll a \cdot u_s, \quad l_{tr} < \frac{\pi a}{N_{cr}}, \quad (49)$$

где

$$N_{cr} = \frac{\xi(0)}{a} \left(\frac{\Delta_0}{\pi T_c} \right), \quad \xi(0) = \sqrt{\frac{D}{\pi T_c}}. \quad (50)$$

В случае, если второе из условий (49) не выполняется, то выражение для тока (47) может быть использовано, во всяком случае, до значений N порядка N_1 , где

$$N_1 = \frac{\pi a}{2l_{tr}}. \quad (51)$$

Для исследования области значений $N > N_1$ необходимо использовать более общие уравнения, справедливые при произвольной длине свободного пробега электронов [13, 14]. Эта задача требует отдельного рассмотрения и будет сделана нами в подробной публикации.

Цель данной работы – продемонстрировать существование решений в области больших градиентов фазы параметра порядка, способных нести ток, существенно превышающий значение тока при изменении разности фаз в интервале $(-\pi, \pi)$.

Работа Ю.Н.О. поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 17729 и грантом Миннауки РФ. Работа А.И.Л. поддержана NSF грантом # 0120702.

1. M. Cohen, L. Falicov, and J. Phillips. Phys. Rev. Lett. **8**, 316 (1967).
2. B. D. Josephson, Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
3. А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников, ЖЭТФ **51**, 1535 (1966).
4. N.R. Werthamer. Phys. Rev. **147**, 235 (1966).
5. V. Ambegaokar and A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **10**, 486 (1963).
6. Л.Г. Асламазов, А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников, ЖЭТФ **55**, 323 (1968).
7. И.О. Кулик, А.Н. Омелянчук, Письма в ЖЭТФ **21**, 216 (1975).
8. Л.Г. Асламазов, А.И. Ларкин, Письма в ЖЭТФ **9**, 150 (1969).
9. K.D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).
10. А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников, ЖЭТФ **64**, 1096 (1973).
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*, М.: Гос. Изд. Физ.-Мат.-Лит., 1959.
12. И.О. Кулик, А.Н. Омелянчук, *Физика низких температур*, (Харьков) **4**, 296 (1978).
13. G. Eilenberger, Z. Phys. **214**, 195 (1968).
14. А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников, ЖЭТФ **55**, 2262 (1968).