Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 6, с. 406 – 410 © 2002 г. 25 сентября

Представление вихревых линий для течений идеальной и вязкой жидкостей

Е. А. Кузнецов[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 августа 2002 г.

Показано, что гидродинамика Эйлера для вихревых течений идеальной жидкости совпадает с уравнениями движения для заряженной *сжимаемой* жидкости, двигающейся под действием самосогласованного электромагнитного поля. Переход к лагранжевому описанию в новой гидродинамике эквивалентен для уравнений Эйлера смешанному лагранжево-эйлеровому описанию – представлению вихревых линий (ПВЛ) [5]. Благодаря сжимаемости новой гидродинамики, коллапс вихревых течений идеальной жидкости может возникать в результате опрокидывания вихревых линий. Найдено, что уравнение Навье–Стокса в представлении вихревых линий сводится к уравнению диффузионного типа для инварианта Коши с тензором диффузии, задаваемом метрикой ПВЛ.

PACS: 47.15.Ki, 47.32.Cc

1. Коллапс, как процесс образования особенности за конечное время из начально гладкого распределения, играет принципиально важную роль в физике, представляя собой один из наиболее эффективных механизмов диссипации энергии. Для гидродинамики несжимаемой жидкости коллапс должен играть также весьма важную роль. Хорошо известно, что появление особенности в газодинамике, то есть в сжимаемой гидродинамике, связано с явлением опрокидывания, которое есть основная причина формирования ударных волн. С точки зрения классической теории катастроф [1] этот процесс есть ни что иное, как формирование складок. Он полностью характеризуется отображением, описывающим переход от эйлерового описания к лагранжевому. Обращение якобиана J этого отображения в нуль означает появление особенности для производных скорости и плотности газа. В несжимаемом случае опрокидывание отсутствует, поскольку якобиан соответствующего отображения фиксирован, в простейшей калибровке он равен единице. По этой причине, казалось бы, нет никаких оснований для существования такого рода явлений. Однако, несмотря на это, опрокидывание, как было указано в работах [2 – 4], возможно и в этом случае. Оно возникает для вихревых линий. В отличие от опрокидывания в газодинамике, когда одна траектория лагранжевой частицы пересекается с траекторией другой лагранжевой частицы, опрокидывание вихревых линий означает, что одна вихревая линия догоняет другую вихревую линию. Для гладкого непрерывного распределения завихренности опрокидывание в первый момент наступает при касании вихревых линий в одной отдельной точке. При этом в точке касания завихренность обращается в бесконечность. И это возможно, несмотря на несжимаемость векторных полей завихренности и скорости жидкости. Для описания опрокидывания вихревых линий в работах [5, 6] было предложено представление вихревых линий – смешанное лагранжево-эйлеровое описание, когда каждая вихревая линия нумеруется двумерным лагранжевым маркером, а другой параметр задает саму вихревую линию.

Данная работа посвящена развитию этого метода применительно как к идеальным, так и вязким жидкостям. В работе выяснена роль переменных Клебша, которые могут быть использованы в качестве лагранжевых маркеров вихревых линий. Переменные Клебша, однако, годятся только для локального описания. В ситуации общего положения переход к представлению вихревых линий в уравнении Эйлера эквивалентен рассмотрению новой *сжимаемой* гидродинамики заряженной жидкости, двигающейся под действием самосогласованных электрических и магнитных полей. При этом электрическое и магнитное поля удовлетворяют паре уравнений Максвелла. Важным здесь является сжимаемость новой гидродинамики, что при ее лагранжевом описании означает сжимаемость отображения и, соответственно, возможность опрокидывания. В терминах эйлеровых характеристик в результате опрокидывания вихревых линий завихренность скорости $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \Omega$ становится бесконечной. В рамках новой гидродинамики заряженной жидкости роль плотности играет величина, обратная J, которую естественно назвать

1)e-mail: kuznetso@itp.ac.ru

плотностью вихревых линий. Эта величина возникает из формулы Коши для завихренности Ω. Изменение плотности вихревых линий обязано нормальной к завихренности компоненте скорости. Как показано в данной работе, формула Коши может быть получена как из "новой" теоремы Кельвина о сохранении циркуляции, так и исходя из аналога преобразования Вебера. В результате уравнения Эйлера оказываются разрешенными относительно инвариантов Коши – бесконечного числа интегралов движения. В этом случае можно говорить об уравнениях Эйлера как о частично проинтегрированных уравнениях. Это обстоятельство принципиально важно при численном интегрировании уравнений Эйлера.

Представление вихревых линий (ПВЛ) может быть применено не только к идеальной гидродинамике, но также для описания течений вязкой несжимаемой жидкости в рамках уравнения Навье–Стокса. В работе получено уравнение диффузионного типа, описывающее динамику инварианта Коши в вязком случае с "тензором диффузии", определяемым метрикой ПВЛ. По своей форме это уравнение совпало с уравнением, выведенным в [7]. При этом уравнения движения вихревых линий – в свой прежней форме – понимаются как уравнения, задающие переход в криволинейную систему координат. Полученные точные уравнения для описания вязких течений можно рассматривать как результат точного разделения двух временных масштабов – инерционного (нелинейного по сути) и вязкого.

2. Как известно (см., например, обзоры [8, 9]), уравнения Эйлера для несжимаемой идеальной жидкости

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

как для двумерных, так и для трехмерных течений обладают бесконечным числом интегралов движения. Это так называемые лагранжевые инварианты Коши. Наиболее просто выражение для инварианта Коши можно получить, исходя из теоремы Кельвина о сохранении циркуляции скорости:

$$\Gamma = \oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}), \tag{2}$$

где контур интегрирования $C[\mathbf{r}(t)]$ двигается вместе с жидкостью. Если в этом выражении перейти от эйлеровых координат $\mathbf{r}$ к лагранжевым $\mathbf{a}$, то (2) перепишется в виде

$$\Gamma = \oint \dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial a_k}\, da_k,$$

где контур $C[\mathbf{a}]$ уже будет неподвижным.

В силу произвольности контура $C[\mathbf{a}]$ и благодаря формуле Стокса, отсюда немедленно следует, что величина

$$\mathbf{I} = \operatorname{rot}_a \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{a}} \right) \tag{3}$$

сохраняется в каждой точке $\mathbf{a}$. Это и есть лагранжев инвариант Коши. Сохранение этих инвариантов, как это было показано Салмоном [9], обязано специальной (бесконечной) симметрии – симметрии относительно переобозначения лагранжевых маркеров (relabeling symmetry). Если лагранжевы координаты $\mathbf{a}$ в (3) совпадают с начальными положениями жидких частиц, то инвариант $\mathbf{I}$ совпадает с начальной завихренностью $\Omega_0(\mathbf{a})$. Инварианты Коши характеризуют вмороженность вихревых линий в жидкость. Это очень важное свойство, согласно которому жидкие (лагранжевы) частицы не могут покинуть собственную вихревую линию, на которой они находились в начальный момент времени. Для лагранжевых частиц, таким образом, имеется одна незамороженная степень свободы – движение вдоль вихревой линии. Однако такое движение, как это видно из уравнений движения для завихренности

$$\partial \Omega/\partial t = \operatorname{rot}\, [\mathbf{v} \times \Omega], \tag{4}$$

не изменяет ее значения. С этой точки зрения, вихревая линия является инвариантным объектом и естественно поэтому перейти к такому описанию, где эта инвариантность видна с самого начала. Такое описание – представление вихревых линий – было предложено в работах Рубана и автора [1, 6].

3. Рассмотрим вихревое течение ($\Omega \neq 0$) идеальной жидкости, задаваемое через переменные Клебша λ и μ:

$$\Omega = [\nabla\lambda \times \nabla\mu]. \tag{5}$$

Геометрический смысл этих переменных хорошо известен: пересечение поверхностей $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ задает вихревую линию. Известно также, что в несжимаемом случае переменные Клебша являются лагранжевыми инвариантами, неизменными вдоль траектории жидких частиц:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\lambda = 0; \quad \frac{\partial\mu}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mu = 0. \tag{6}$$

Поэтому эти переменные можно взять в качестве маркеров вихревых линий. Легко устанавливается, что переход в (5) к новым переменным

$$\lambda = \lambda(x, y, z), \quad \mu = \mu(x, y, z), \quad s = s(x, y, z), \tag{7}$$

где s – параметр, задающий данную вихревую линию, приводит к выражению

$$\Omega(\mathbf{r},t)=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}. \tag{8}$$

Здесь

$$J=\partial(x,y,z)/\partial(\lambda,\mu,s) \tag{9}$$

– якобиан преобразования

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}(\lambda,\mu,s). \tag{10}$$

Преобразование (10), обратное к (7), определяет соответствующий переход в криволинейную, связанную с вихревыми линиями, систему координат.

Уравнения движения вихревых линий – уравнения для $\mathbf{R}(\lambda,\mu,s,t)$ – может быть непосредственно получено из уравнения движения для завихренности (4). Однако наиболее простой способ их получения – это воспользоваться комбинацией уравнений (6):

$$\nabla\mu\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\lambda\right]-\nabla\lambda\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mu\right]=0, \tag{11}$$

которая тождественна (6) в силу линейной независимости векторов $\nabla\lambda$ и $\nabla\mu$.

Совершая в (11) преобразования (7), приходим к уравнению движения вихревой линии [1]:

$$\left[\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}\times\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t}-\mathbf{v}(\mathbf{R},t)\right)\right]=0. \tag{12}$$

Важной особенностью этого уравнения является его “поперечность”: всякое движение вдоль вихревой линии не меняет саму вихревую линию. Легко видеть, что (12) эквивалентно уравнению

$$\partial\mathbf{R}/\partial t=\mathbf{v}_n(\mathbf{R},t), \tag{13}$$

где $\mathbf{v}_n$ – нормальная компонента скорости к вектору завихренности.

Согласно теореме Дарбу, переменные Клебша могут быть введены локально всегда, но не глобально. Хорошо известно, что течения, параметризуемые через переменные Клебша, имеют нулевой инвариант спиральности $\int(\mathbf{v}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{v})d\mathbf{r}$ – топологический инвариант, характеризующий степень зацепления вихревых линий. Поэтому, чтобы ввести представление вихревых линий для течений с нетривиальной топологией, необходимо обратиться непосредственно к изначальным уравнениям движения – уравнениям (1), (4) для скорости и ее завихренности.

4. Согласно уравнению (4), тангенциальная к вектору Ω компонента скорости $\mathbf{v}_\tau$ не оказывает (прямого) влияния на изменение завихренности, то есть в (4) вместо скорости $\mathbf{v}$ нужно поставить ее поперечную компоненту $\mathbf{v}_n$.

Уравнение движения для поперечной скорости $\mathbf{v}_n$ следует непосредственно из уравнения (1). Оно имеет вид уравнения движения частицы в электромагнитном поле:

$$\partial\mathbf{v}_n/\partial t+(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n=\mathbf{E}+[\mathbf{v}_n\times\mathbf{H}], \tag{14}$$

где эффективные поля – электрическое и магнитное – даются выражениями

$$\mathbf{E}=-\nabla\left(p+\frac{v_\tau^2}{2}\right)-\frac{\partial\mathbf{v}_\tau}{\partial t}, \tag{15}$$

$$\mathbf{H}=\mathrm{rot}\ \mathbf{v}_\tau. \tag{16}$$

Интересно отметить, что введенные таким образом электрическое и магнитное поля выражаются через скалярный – φ и векторный – $\mathbf{A}$ потенциалы стандартным образом:

$$\varphi=p+\mathbf{v}_\tau^2/2,\quad \mathbf{A}=\mathbf{v}_\tau, \tag{17}$$

так что два уравнения Максвелла

$$\mathrm{div}\ \mathbf{H}=0,\quad \partial\mathbf{H}/\partial t=-\mathrm{rot}\ \mathbf{E}$$

автоматически удовлетворяются. При этом на векторный потенциал $\mathbf{A}$ наложена калибровка

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A}=-\mathrm{div}\ \mathbf{v}_n,$$

которая эквивалентна условию $\mathrm{div}\ \mathbf{v}=0$.

Два других уравнения Максвелла могут быть также записаны, но не несут никакой дополнительной нагрузки, поскольку плотность заряда ρ и ток $\mathbf{j}$ формально определяются из соотношений (15), (16). Базовым здесь является само уравнение движения (14) для нормальной компоненты скорости, которое представляет собой уравнение движения для нерелятивистской частицы с зарядом и массой, равными единице, скорость света при этом также равна единице.

Уравнение движения (14) записано в эйлеровом представлении. Чтобы перейти к его лагранжевой формулировке, нужно рассмотреть уравнения для “траекторий”, которые определяются скоростью $\mathbf{v}_n$:

$$d\mathbf{R}/dt=\mathbf{v}_n(\mathbf{R},t) \tag{18}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{R}|_{t=0}=\mathbf{a}.$$

Решение уравнения (18) задает отображение

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}(\mathbf{a},t), \tag{19}$$

определяющее переход от эйлерового описания к новому лагранжевому описанию.

Уравнения движения в новых переменных суть уравнения Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{R}}, \qquad \dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{P}}, \tag{20}$$

где точка означает дифференцирование по времени при фиксированном значении $\mathbf{a}$, $\mathbf{P} = \mathbf{v}_n + \mathbf{A} \equiv \mathbf{v}$ есть обобщенный импульс, а гамильтониан частицы h, являясь функцией импульса $\mathbf{P}$ и координаты $\mathbf{R}$, дается стандартным выражением:

$$h = \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{A})^2 + \varphi \equiv p + \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Первое уравнение системы (20) – это уравнение движения (14), записанное в переменных $\mathbf{a}$, t, а второе уравнение совпадает с (18).

Для "новой" гидродинамики (14) или ее гамильтоновской формулировки (20) справедлива теорема Кельвина (она же теорема Лиувилля):

$$\Gamma = \oint (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{R}), \tag{21}$$

где интегрирование ведется по замкнутому, двигающемуся вместе с "жидкостью", контуру. Отсюда точно также, как это было сделано выше при выводе (3), следует выражение для "нового" инварианта Коши:

$$\mathbf{I} = \mathrm{rot}_a \left(P_i \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{a}} \right). \tag{22}$$

Его отличие от оригинального инварианта Коши (3) состоит в том, что в уравнении движения (18) вместо скорости $\mathbf{v}$ стоит ее нормальная компонента $\mathbf{v}_n$. Как следствие, "новая" гидродинамика является сжимаемой: $\mathrm{div}\, \mathbf{v}_n \neq 0$. Поэтому на якобиан J преобразования (19) не накладывается никаких ограничений.

Из формулы (22) легко может быть получено выражение для завихренности Ω (ср. с [1, 6]):

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \frac{(\Omega(\mathbf{a}) \cdot \nabla_a)\mathbf{R}(a, t)}{J}, \tag{23}$$

где J – якобиан преобразования (19), равный

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)}.$$

Здесь мы учли, что обобщенный импульс $\mathbf{P}$ совпадает со скоростью $\mathbf{v}$, включая момент времени $t = 0$: $\mathbf{P}_0(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{v}_0(\mathbf{a})$; $\Omega_0(\mathbf{a})$ в этом соотношении есть новый инвариант Коши (совпадающий с начальной завихренностью), имеющий нулевую дивергенцию: $\mathrm{div}_a \Omega_0(a) = 0$.

Представление (23) обобщает соотношение (5) на произвольную топологию вихревых линий. Переменные $\mathbf{a}$ в этом выражении локально можно понимать как набор λ, μ и s.

Как известно (см. [6]), выражение для инварианта Коши может быть получено, исходя из преобразования Вебера. Это – представление скорости в терминах начальных данных, которое может быть получено, в частности, после интегрирования инварианта Коши (23).

Рассмотрим одноформу $\omega = (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{R})$ и вычислим ее производную по времени. Воспользовавшись уравнениями движения (20), в результате получим:

$$\dot{\omega} = d[-h + (\mathbf{P}\dot{\mathbf{R}})].$$

Отсюда следует, что вектор-функция

$$u_k = \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \cdot P_i,$$

зависящая от t и $\mathbf{a}$, подчиняется следующему уравнению движения:

$$\dot{u}_k = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(-p + \frac{v_n^2}{2} - \frac{v_\tau^2}{2} \right).$$

Интегрирование по времени этого уравнения дает преобразование Вебера:

$$u_k(\mathbf{a}, t) = u_{k0}(\mathbf{a}) + \partial \Phi / \partial a_k, \tag{24}$$

где потенциал Φ подчиняется нестационарному уравнению Бернулли:

$$\dot{\Phi} = -p + v_n^2/2 - v_\tau^2/2.$$

Если $\Phi|_{t=0} = 0$, то не зависящий от времени вектор $\mathbf{u}_0(\mathbf{a})$ совпадает с начальным значением скорости $\mathbf{v}_0(\mathbf{a})$. Взятие ротора от соотношения (24) вновь приводит нас к инварианту Коши (22).

Таким образом, в случае общего положения уравнение движения вихревых линий имеет вид уравнения (18), которое дополняется соотношением (23) и уравнением

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \mathrm{rot}_r \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \tag{25}$$

с условием $\mathrm{div}_r \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$.

Уравнения движения (18), (25) вместе с соотношением (23) можно рассматривать как результат частичного интегрирования уравнения Эйлера (1). Эти уравнения разрешены относительно инвариантов Коши – бесконечного числа интегралов движения, что принципиально важно при численном интегрировании (см. [4, 5]). Для этой системы инварианты Коши сохраняются автоматически, в то время как при прямом интегрировании уравнений Эйлера нужно следить, в какой степени инварианты Коши являются сохраняющимися величинами. По-видимому, этот факт есть одно из главных ограничений, определяющих точность дискретных численных схем при прямом интегрировании уравнений Эйлера.

Другим важным свойством представления вихревых линий является отсутствие каких-либо ограничений на якобиан J, какие, например, имеют место при переходе от эйлерового описания к лагранжевому в уравнении Эйлера (1), когда якобиан равен единице. При этом $1/J$ имеет смысл плотности n вихревых линий. Эта величина в силу уравнения (18) как функция $\mathbf{r}$ и t подчиняется уравнению непрерывности:

$$\partial n/\partial t + \mathrm{div}_r(n\mathbf{v}_n) = 0. \tag{26}$$

В этом уравнении $\mathrm{div}_r \mathbf{v}_n \neq 0$, поскольку только полная скорость $\mathbf{v}$ имеет нулевую дивергенцию.

5. Рассмотрим теперь вопрос о применении ПВЛ к описанию течений вязкой жидкости.

Запишем уравнение Навье-Стокса для завихренности Ω:

$$\partial\Omega/\partial t = \mathrm{rot}[\mathbf{v}\times\Omega] - \nu\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \Omega \tag{27}$$

и совершим в нем переход к переменным $\mathbf{a}$ и t посредством замен, определяемых уравнением (18), дополняемым соотношением Коши (23) в котором Ω_0 будем считать функцией не только координат $\mathbf{a}$, но и времени t: $\Omega_0 = \Omega_0(\mathbf{a}, t)$.

Тогда при подстановке (23) в (27) первое слагаемое в правой части сократится в силу (18). В результате уравнение (27) запишется в виде

$$\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\Omega_0}{\partial t}\cdot\nabla_a\right)\mathbf{R} = -\nu\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\left\{\frac{1}{J}(\Omega_0\cdot\nabla_a)\mathbf{R}\right\}. \tag{28}$$

Далее заменим дифференцирование по $\mathbf{r}$ в правой части (28) на дифференцирование по переменным $\mathbf{a}$. В результате простых, но достаточно громоздких вычислений уравнение (28) превращается в уравнение для $\Omega_0(\mathbf{a}, t)$:

$$\frac{\partial\Omega_0}{\partial t} = -\nu\ \mathrm{rot}_a\left(\frac{\hat{g}}{J}\mathrm{rot}_a\left(\frac{\hat{g}}{J}\Omega_{\mathbf{0}}\right)\right). \tag{29}$$

Это уравнение линейно относительно Ω_0, в нем $\hat{g}$ – метрический тензор, равный

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial a_\beta}.$$

Уравнение (29) для инварианта Коши по своей форме совпадает с уравнением, полученным Зенковичем и Якубовичем [7] для несжимаемой гидродинамики, когда переменные $\mathbf{a}$ имеют смысл лагранжевых маркеров жидких частиц. В уравнении Зенковича-Якубовича якобиан J предполагается не зависимым от времени, в простейшем варианте он равен 1. В этом и состоит принципиальное отличие уравнения Зенковича–Якубовича от уравнения (29).

Примечательной особенностью полученной системы является *точное разделение* двух различных временных масштабов, ответственных за инерционные (по сути – нелинейные) процессы и вязкие. Первые описываются уравнением (18), а вязкие процессы – уравнением диффузионного типа (29), в котором “коэффициент” диффузии, пропорциональный коэффициенту вязкости ν, имеет сложную тензорную структуру, определяемую метрикой отображения $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{a}, t)$.

Автор благодарит Е. И. Якубовича за возможность ознакомиться с работой [7] до ее опубликования. Данная работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 00-01-00929), Программой ведущих научных школ РФ (грант # 00-15-96007) и INTAS (грант 00-00292).

1. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, М.: Знание, 1981; *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1984.
2. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, ЖЭТФ **118**, 893 (2000).
3. В. А. Желиговский, Е. А. Кузнецов, О. Н. Подвигина, Письма в ЖЭТФ **74**, 402 (2001).
4. E. A. Kuznetsov, O. N Podvigina, and V. A. Zheligovsky, *Numerical evidence of breaking of vortex lines in an ideal fluid*, in: Proc. of IUTAH Symp. “Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics”, Zakopane, Kluver, 2002 (in press).
5. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).
6. E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, Phys. Rev. **E61**, 831 (2000).
7. E. I. Yakubovich and D. A. Zenkovich, Proc. of Int. Conf. “Progress in Nonl. Science”, July 2001, N. Novgorod, Russia, Ed. A. G. Litvak, Nizhny Novgorod, 2002, p. 282; physics/0110004.
8. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **137**, 1137 (1977).
9. R. Salmon, Ann. Rev. Fluid Mech. **20**, 225 (1988).