

Подвижность электронов на пленке гелия с шероховатой подложкой

В. Шикин

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 20 июня 2002 г.

После переработки 19 июля 2002 г.

Обсуждаются причины специфического активационного поведения подвижности электронов на гелиевой пленке с подложками разных типов. Характерной чертой наблюдаемой энергии активации E_a является ее зависимость от эффективной толщины пленки гелия d вида $E_a \propto d^{-2}$. Предлагается сценарий возникновения такого эффекта, принимающий во внимание шероховатость гелиевых подложек.

PACS: 67.70.+n, 72.60.+g, 73.50.-h

Среди интересных экспериментальных результатов, не нашедших пока убедительной интерпретации, имеются данные о подвижности электронов на тонкой пленке гелия с разными подложками, демонстрирующие ее активационное поведение. При этом энергия активации E_a обратно пропорциональна квадрату эффективной толщины пленки гелия (см. [1–4]).

Вариант объяснения этого эффекта, предложенный Платцманом [2], использует “поляронные” мотивы. Полагается, что электрон на тонкой пленке гелия с идеальной подложкой образует связанное состояние (одноэлектронная лунка). При этом в рамках приближения Фейнмана [5] можно посчитать основные характеристики лунки. В частности, ее эффективная масса M равна [6, 7]

$$M \propto \exp(\sqrt{\alpha}), \quad \alpha = \frac{mF_*^2}{4\pi\sigma(\hbar k_c)^2}, \quad (1)$$

$$F_* = eE_{\perp} + \Lambda/d^2, \quad \Lambda = \frac{e^2(\epsilon_d - \epsilon)}{(1 + \epsilon)^2(\epsilon_d + \epsilon)}, \quad (2)$$

где k_c – характерный обрезаящий фактор порядка обратных размеров волновой функции электрона в лунке, ϵ , ϵ_d – диэлектрические постоянные гелия и твердой подложки, d – локальная толщина пленки гелия.

Допуская еще, что подвижность лунки $\mu \propto M^{-1}$ и учитывая определения (1), (2) автор [2] приходит к формуле $\mu \propto \exp(-\beta/d^2)$, объясняющий данные [1–4]. Однако этот же формализм свидетельствует о малой вероятности образования лунок на пленке гелия в окрестности температур $T \leq 1$ К (см. [8]).

В других вариантах теории одноэлектронных лунок [9] эффективная масса M оказывается лишь степенной функцией d :

$$M \equiv \frac{\rho F_*^2}{8\pi\sigma^2 \kappa_*^2 d}, \quad \kappa_*^2 = \rho g_*/\sigma, \quad \kappa_* d < 1 \quad (3)$$

(ρ, σ – плотность жидкого гелия и его коэффициент поверхностного натяжения, g_* – эффективное ускорение силы тяжести, детали см. ниже, формула (23)). Кроме того, гипотеза $\mu \propto M^{-1}$, не бесспорна. Согласно [9],

$$\mu \equiv \frac{4\pi\sigma^2 e(\kappa_* d)^2 d}{3\eta F_*^2} \quad (4)$$

(η – вязкость жидкого гелия, F_* – из (2)). Очевидно, величина M^{-1} (3) не адекватна μ (4) в смысле ее зависимости от толщины пленки.

Таким образом, экспериментальные результаты [1–4] относительно закона $\mu \propto \exp(-\beta/d^2)$ для разнообразных твердых подложек в достаточно широком интервале толщин d , возможно, не имеют поляронного происхождения. Вопрос остается дискуссионным.

В данной работе обсуждается альтернативный сценарий специфического поведения подвижности электронов на пленке гелия, принимающий во внимание шероховатость твердых подложек, практически неизбежно присутствующую в экспериментах с тонкими жидкими пленками.

1. Уравнение для профиля $d(x, y)$ пленки гелия на шероховатой подложке имеет вид

$$\sigma \frac{\Delta_2 d}{\sqrt{1 + (\nabla d)^2}} - \rho g d(x, y) + \frac{f}{(d - \delta)^3} = -\rho g h. \quad (5)$$

Толщина $d(x, y)$ отсчитывается от нулевой отметки $\delta(x, y)$, g – ускорение силы тяжести, f – константа Ван-дер-Ваальса (обычно несколько десятков градусов), h – высота пьедестала над уровнем массивного гелия (отсчитывается от нуля $\delta(x, y)$). В отсутствие шероховатости формула (5) сводится к определению равновесной толщины \bar{d} пленки на плоской подложке

$$f/\bar{d}^3 = \rho g(\bar{d} - h). \quad (6)$$

Пока $h > 0$, решение (6) возможно, если $\bar{d} \geq h$. При $h = 0$ величина \bar{d} (6) остается конечной. Наконец,

в области отрицательных h формула (6) приобретает вид, традиционный для определения тонкой пленки насыщения:

$$f/\bar{d}^3 = \rho g h_m, \quad h_m \equiv |h| \gg \bar{d}. \quad (6a)$$

Отметим, что в определениях (5)–(6) отсутствуют эффекты запаздывания, усложняющие поведение сил Ван-дер-Ваальса на малых h . Это упрощение не искажает качественной картины (6), (6a) для $d(h)$ при прохождении h через нуль и становится обоснованным в интересующем нас ниже пределе малых толщин пленки гелия (больших значениях h_m).

Пусть теперь функция $\delta(x, y) \neq 0$ и характеризуется нормальным распределением амплитуд

$$D(\delta) = \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{1/2}} \exp(-\delta^2/2\Delta^2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) dx dy = 0 \quad (7)$$

($\Delta^2 = \langle \delta^2 \rangle$ – среднеквадратичная дисперсия распределения), а также корреляционными функциями

$$\begin{aligned} \langle \delta(x, y)\delta(x-x', y) \rangle &= \Delta^2 \exp(-x'^2/2\eta^2), \\ \langle \delta(x, y)\delta(x, y-y') \rangle &= \Delta^2 \exp(-y'^2/2\eta^2), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\langle \eta^2 \rangle$ – характерный корреляционный радиус, одинаковый (для простоты) в обоих горизонтальных направлениях.

В условиях $\delta(x, y) \neq 0$ задача о профиле $d(x, y)$ сводится, грубо говоря, к обсуждению вопроса об эффективной высоте, на которой сфера (цилиндр) радиуса R , спускаясь вниз, останавливается лесом вершин со стохастическими свойствами (7), (8). Роль эффективного экранирующего радиуса R при монотонном изменении h последовательно играют величины

$$R_o^2 = \sigma/\rho g, \quad (9a)$$

$$R = \sigma/\rho g h_m, \quad (9b)$$

$$R_*^2 = \sigma/\rho g g_*, \quad (9c)$$

$$g_* = 3f/(\sigma\bar{d}^4), \quad h_m = |h|,$$

возникающие из анализа свойств уравнения (5): радиус R_o (9a) известен классической теории мениска [10], величина R (9b) следует из (5), если в промежутке между крайними точками мениска можно пренебрегать силами Ван-дер-Ваальса, возникновение радиуса R_* (9c) в интересующей нас трактовке будет продемонстрировано ниже (см. формулы (23), (24)).

Используя общее определение числа пиков $\delta(x, y) \neq 0$, пересекающих заданную высоту (см., например, [11]), и уравнение (5), для которого эти

(так называемые активные) пики участвуют в формировании эффективных граничных условий, можно проследить за разными предельными случаями в поведении $d(x, y)$.

Экзотический случай (9a) реализуется в области $h > 0$. Роль шероховатости в этой области мало существенна.

Следующий, более актуальный вариант (9b) имеет место для малых отрицательных h . Здесь жидкие мениски радиусом R “повисают” на активных пиках высотой δ_a с расстоянием b_a между ними. Связь между δ_a , b_a и параметрами задачи, R , Δ , η , определена выражениями

$$R = \frac{b_a}{2} \sqrt{1 + \frac{b_a^2}{2\Delta^2} \ln \frac{b_a}{s\eta}}, \quad \frac{\delta_a^2}{2\Delta^2} = \ln \frac{b_a}{s\eta}, \quad (10)$$

$$b_a/(s\eta) \gg 1, \quad s^2 = 2\pi,$$

где Δ, η – из (7), (8).

Минимальная толщина пленки d_{\min} в центральной части мениска радиусом R равна

$$d_{\min} = \Delta_m [\sqrt{2}(\ln(\Delta^{1/2} R^{1/2}/s\eta)) - 1/2], \quad \Delta_m = |\Delta|. \quad (11)$$

Она должна превышать Δ_m , чтобы мениск не испытывал (в основном) влияния сил Ван-дер-Ваальса. Это требование, переписанное в терминах h :

$$h_m < h_m^{cr}, \quad [\sqrt{2}(\ln(\Delta^{1/2} R_{cr}^{1/2}/s\eta)) - 1/2] = 1, \quad (12)$$

$$R_{cr} = 2\sigma/\rho g h_m^{cr},$$

определяет область существования предела (9b).

Сценарий (9b) отвечает начальной стадии влияния шероховатости на свойства 2D электронов. Здесь имеет смысл разбиение плотности электронов на две компоненты:

$$n_s = n_e + n_l, \quad (13)$$

где n_e – свободные электроны, сохраняющие хорошую подвижность вдоль менисков радиусом R , и локализованные электроны n_l , прилипающие к активным вершинам профиля $d(x, y)$. Для расчета подвижности квазисвободных электронов на шероховатой подложке можно пользоваться теорией возмущения: борновское приближение, кинетическое уравнение и т.д. Однако ясно, что этот предельный случай бесперспективен для получения активационного поведения подвижности электронов в функции от параметров шероховатости и толщины пленки, хотя такие попытки имеются (см. [12–14]).

В условиях $h_m > h_m^{cr}$ радиус лапласовской экранировки R_* становится сравнимым с η (сценарий (9c)), характерное значение d_{\min} “спускается” в область

$d_{\min} \leq 0$, так что пренебрежение силами Ван-дер-Ваальса в промежутках между пиками δ_a становится невозможным. Пропадают основания и для разбиения (13) плотности электронов на две подсистемы, ибо теперь все электроны начинают сильно взаимодействовать с подложкой. Как будет видно ниже, основную роль в задаче о подвижности электронов для сценария (9с) начинают играть две характеристики: эффективное положение седловых точек рельефа $\delta(x, y) \neq 0$ и степень экранировки пленкой гелия его глубоких ям. В режиме (9с) их определение является основной задачей.

Ответы на поставленные вопросы можно получить, используя понятие взаимной вероятности W_n разных величин в задаче с нормальной случайностью (7), (8) (см [11]). В нашем случае речь идет о совместной вероятности $\delta(x, y)$ и ее вторых производных. Вводя упрощающие обозначения

$$\xi_1 = \delta, \quad \xi_2 = \delta''_x, \quad \xi_3 = \delta''_y,$$

имеем для W_3 :

$$W_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 D^{1/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2D} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} \frac{(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)}{\sigma_i \sigma_j} \right] \quad (14)$$

Здесь $m_i = \langle \xi_i \rangle$ (в нашем случае все m_i равны нулю), $\sigma_i^2 = \langle (\xi_i - m_i)^2 \rangle$ – дисперсия случайной величины ξ_i , D – определитель 3-го порядка,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & 1 & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

составленный из коэффициентов корреляции

$$Q_{ij} = \langle (\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j) \rangle / \sigma_i \sigma_j,$$

D_{ij} – алгебраическое дополнение элемента Q_{ij} определителя D .

Используя W_3 , найдем положение $\delta = \delta_c$ эффективной плоскости протекания для рельефа $\delta(x, y)$. По определению, речь идет о плоскости, в окрестности которой вторые производные δ''_i равны по величине (следствие изотропии принятой модели (8)) и обратны по знаку. Оптимальное значение δ_c находится в этом случае из условия

$$\partial W_3 / \partial \delta |_{\delta''_x = -\delta''_y} = 0. \quad (15)$$

Дифференцируя W_3 (14) по ξ_1 при фиксированных производных δ''_i , находим

$$\frac{D_{11}}{\sigma_1^2} \xi_1 + \frac{D_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} (\xi_2 + \xi_3) = 0, \quad (16)$$

$$D_{12} = D_{21}, \quad \sigma_2 = \sigma_3.$$

Если далее, согласно (15), положить $\xi_2 = -\xi_3$, то

$$\xi_1^c \equiv \delta_c = 0. \quad (17)$$

Другими словами, плоскость протекания находится на нулевом уровне в системе координат, привязанной к плоскости симметрии функции $\delta(x, y)$ (что интуитивно представляется разумным и без доказательства).

Соотношение (16) оказывается ключевым и в задаче об оптимальном значении амплитуды δ_* впадин рельефа $\delta(x, y)$ с заданной положительной кривизной R_*^{-1} (пики $\delta(x, y)$ имеют отрицательную кривизну, ямы – положительную):

$$\delta''_y = \delta''_x = R_*^{-1}. \quad (18)$$

Используя (16), имеем для $\delta_* \equiv \xi_1^*$:

$$\frac{D_{11}}{\sigma_1^2} \xi_1^* + \frac{D_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} 2R_*^{-1} = 0. \quad (19)$$

С учетом (7), (8) и общих правил вычисления корреляционных функций, позволяющих найти явный вид возникающих в (19) комбинаций

$$\sigma_1^2 = \Delta^2, \quad \sigma_2 = \sigma_3^2 = 3\Delta^2/\eta^4,$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \xi_3 \rangle = -\Delta^2/\eta^2, \quad \langle \xi_2 \xi_3 \rangle = 0,$$

находим из (19), (18)

$$\delta_* = -2\eta^2/3R_*. \quad (20)$$

Величина δ_* имеет простой физический смысл. Все впадины (ямы) рельефа $\delta(x, y)$ с глубиной δ_\downarrow по модулю меньшей δ_* , покрыты пленкой гелия, практически повторяющей детали шероховатости. Если же $|\delta_\downarrow| > |\delta_*|$, такие ямы заполнены гелием до уровня δ_* с радиусом мениска R_* .

Здесь же уместно показать, как возникает в задаче радиус R_* . Полагая внутри данной ямы

$$d(x, y) = -d_\downarrow + \zeta(x, y), \quad |\zeta| \ll |d_\downarrow|, \quad (21)$$

$$\delta(x) = -\delta_\downarrow + \xi(x, y), \quad |\xi| \ll |d_\downarrow|,$$

имеем из (5) в нулевом приближении

$$\frac{f}{(-d_\downarrow + \delta_\downarrow)^3} = -\rho gh, \quad (22)$$

то есть эффективная толщина пленки совпадает с плоским определением \bar{d} (6а):

$$(-d_{\perp} + \delta_{\perp}) \simeq \bar{d}.$$

Следующее приближение дает

$$\sigma \frac{\Delta_2 \zeta}{\sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2}} - \rho g_* \zeta(x, y) + F_f \xi(x, y) = 0, \quad F_f = 3f/\bar{d}^4, \quad (23)$$

$$g_* = g + F_f/\rho.$$

Уравнение (23) содержит характерную длину

$$R_*^2 \simeq \sigma/\rho g^*, \quad (24)$$

определяющую свойства жидкого мениска в условиях, обратных (12) (сценарий (9с)).

2. Электрон на пленке гелия имеет несколько каналов взаимодействия с подложкой. Одним из них является его прямое взаимодействие с частично экранированным прижимающим полем E_{\perp}^* . Для плоской границы внутреннее поле, подавляющее возмущение E_{\perp} в области, занятой подложкой, полностью локализовано внутри самой подложки и не оказывает влияния на динамику расположенных над нею 2D электронов. Если же граница (для простоты металлическая) изогнута, то требование ее эквипотенциальности во внешнем поле немедленно ведет к появлению экранирующего электропотенциала $\tilde{\varphi}$, отличного от нуля в вакууме над границей. Этот потенциал гармоничен и удовлетворяет граничным условиям

$$eE_{\perp} \delta(x) + e\tilde{\varphi}(x, 0) = \text{const} \equiv 0, \quad \tilde{\varphi}(x, z \rightarrow +\infty) \rightarrow 0, \quad (25)$$

так что

$$\tilde{\varphi}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \varphi_q e^{-iqx} e^{-az}, \quad \varphi_q = -E_{\perp} \delta_q, \quad (26)$$

где δ_q – фурье-компонента функции $\delta(x)$.

С учетом (25) возникает перенормировка прижимающего поля

$$\tilde{E}_{\perp} = E_{\perp} + \partial \tilde{\varphi}(x, d)/\partial z. \quad (27)$$

Кроме того, появляется “горизонтальная” флуктуирующая составляющая энергии электрона во внешнем поле

$$U_{\parallel} = eE_{\perp}(x) + e\tilde{\varphi}(x, d). \quad (28)$$

В длинноволновом пределе $qd \ll 1$

$$U_{\parallel} \simeq eE_{\perp}[d(x) - \delta(x)], \quad (29)$$

как и в случае прижимающего поля, поляризационное притяжение к шероховатой подложке требует модификации “плоских” формул, определяющих это вза-

имодействие. Можно развивать “квазиплоское” приближение (формула вида (2) с переменной толщиной пленки, следующей за профилем $\delta(x, y)$). Однако возникающий формализм весьма громоздок и ведет к обозримым результатам лишь в области $h_m > h_m^{cr}$ (h_m^{cr} из (12)), там, где возможна линейаризация исходного уравнения (5). В случае $h_m > h_m^{cr}$ более удобно заменять реальный профиль подложки неким однородным в горизонтальном направлении распределением плотности $n(z)$, плавно растущим от нуля до объемного значения n_o с характерным размером переходной области порядка Δ . При этом сила F_p притяжения электрона к диэлектрической среде с плавным профилем $n(z)$ записывается в виде

$$F_p(z) = \int f(r) n(z - z_1) dx_1 dy_1 dz_1, \quad (30)$$

$$f(r) = 2\alpha_o e^2/r^5, \quad r > a;$$

здесь $f(r)$ – сила поляризационного взаимодействия отдельного атома подложки с электроном, α_o – поляризуемость отдельного атома, r – расстояние между электроном и данным атомом подложки, a – межатомное расстояние.

Формула (30) обладает нужными асимптотическими свойствами: взаимодействие мало при малых значениях $n(z)$ и в области $n(z) \rightarrow n_o$. Максимум F_p достигается в средней части переходной области. В этой зоне градиент плотности оценивается выражением (начало отсчета $z = 0$ совпадает с максимумом dn/dz)

$$dn/dz \simeq n_o/\Delta, \quad (31)$$

после чего вычисляется интеграл (30):

$$F_p(0) \simeq \pi n_o \alpha_o e^2/a\Delta. \quad (32)$$

Интегральная характеристика $F_p(0)$ (32) адекватно отражает характер поляризационного притяжения электрона к шероховатой подложке. Используя (32), можно представить соответствующую энергию взаимодействия в виде

$$U_p \simeq F_p(0)\delta(x), \quad \delta > \delta_*, \quad (33)$$

δ_* – из (20).

3. Изложенные выше результаты достаточны для оценки энергии активации при движении электронов вдоль тонкой пленки гелия на шероховатой подложке. В общем случае решение задачи об активационной подвижности является самостоятельной проблемой, требующей в каждом конкретном случае значительных усилий (см., например, [15]). Однако претендуя на оценку показателя экспоненты, можно ограничиться энергетическими соображениями.

Прежде всего, из выражений для эффективной энергии электрона на шероховатой подложке (см.(29), (33))

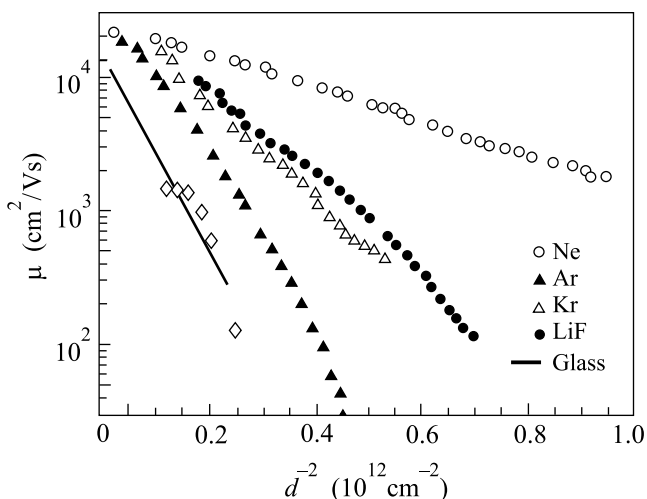
$$U_* \simeq F_* \delta(x), \quad F_* = eE_{\perp} + F_p(0), \quad (34)$$

следует, что в низкотемпературном пределе $T \ll E_a$ все 2D электроны должны находиться в гелиевых лунках, экранирующих впадины с $\delta \leq \delta_*$, (δ_* из (20)) (если, конечно, таких мест достаточно, что предполагается).

Далее, по определению, энергия активации E_a есть разница между энергиями электрона на уровне протекания и в лунках (34). Учитывая полученный выше результат о положении уровня протекания (согласно (17), $\delta_c = 0$), имеем

$$E_a = -F_* \delta_*, \quad \text{или} \quad E_a = \frac{2\pi n_o \alpha_o e^2 \eta^2 f^{1/2}}{a \Delta d^2 \sqrt{3\sigma}}. \quad (35)$$

Эта энергия оказывается пропорциональной d^{-2} , что и требовалось доказать.



Логарифм подвижности 2D электронов на тонкой пленке гелия с разными подложками в зависимости от квадрата обратной толщины пленки d . Круги и треугольники – из [2], ромбы – из [3], сплошная линия – данные из [4], редуцированные в 10 раз

Экспериментальные данные о подвижности электронов на тонкой пленке гелия с разными подложками собраны на рисунке. Зависимость $E_a \propto d^{-2}$ просматривается здесь достаточно четко, хотя наклоны

линий d^{-2} варьируются весьма значительно. Согласно (35), коэффициент пропорциональности в определении E_a содержит, кроме известных величин, параметры шероховатости Δ и η . В реальном 2D случае горизонтальные корреляции η_x, η_y могут быть и разными. В связи с этим, знания лишь одного числа (наклон линии $\ln \mu(d^{-2})$ на рисунке) недостаточно для извлечения детальной информации о параметрах шероховатости используемой подложки.

Итак, работе определены разные варианты (9) экранировки пленкой гелия шероховатости твердой подложки. Каждому из вариантов отвечает свой тип подвижности электронов над гелием. В режиме (9с) эта подвижность оказывается активационной, причем без особых натяжек прыжковый механизм движения электронов дает наблюдаемый результат: $E_a \propto d^{-2}$. Предлагаемая альтернатива с участием шероховатости выглядит более правдоподобно, чем поляронная версия [2] этого эффекта.

1. F. Mende, Yu. Kovdria, and V. Nikolaenko, *Sov. JLTP* **11**, 355 (1985).
2. P. Platzman, *Surf. Sci.* **170**, 55 (1986).
3. H. Jiang and A. Dahm, *Surf. Sci.* **229**, 352 (1990).
4. X. Hu and A. Dahm, *Criogenics* **32**, 681 (1990).
5. Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, М.: Мир, 1968.
6. S. Jackson and P. Platzman, *Phys. Rev.* **B24**, 499 (1981).
7. S. Jackson and P. Platzman, *Phys. Rev.* **B25**, 4886 (1982).
8. F. Peeters and S. Jackson, *Phys. Rev.* **B34**, 1539 (1986).
9. В. Шикин, Ю. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, М.: Наука, 1989.
10. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
11. В. Тихонов, *Выбросы случайных процессов*, М.: Наука, 1970.
12. Yu. Monarkha, U. Albrecht, K. Kono, and P. Leiderer, *Phys. Rev.* **B47**, 13812 (1993).
13. S. Sokolov, J. P. Rino, and N. Studart, *Phys. Rev.* **B51**, 11068 (1995).
14. D. Coimbra, S. Sokolov, J.P. Rino, and N. Studart, *JLTP* **126**, 505 (2002).
15. С. Чандрасекар, *Статистические проблемы в физике и астрономии*, М.: ИИЛ, 1947.