Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 7, с. 488 – 492 © 2002 г. 10 октября

Нетривиальный класс смешанных $U(\sigma+\mu)$-векторных солитонов

А. М. Агаларов[1)], *Р. М. Магомедмирзаев*[+]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

[+]*Институт физики Дагестанского НЦ РАН, 367025 Махачкала, Россия*

Поступила в редакцию 5 июля 2002 г.

После переработки 12 сентября 2002 г.

Точно решена смешанная задача для компактной $U(m)$-векторной нелинейной модели Шредингера с произвольным знаком константы связи. Показано, что в случае $m\geqslant 3$ существует новый класс решений – смешанные $U(\sigma+\mu)$-векторные солитоны с "неупругим" (изменяющим форму без потери энергии)взаимодействием при $\sigma>1$ и строго упругим – при $\sigma=1$. Они представляют собой цветные комплексы, состоящие из σ-светлых и μ-темных солитонов ($\sigma+\mu=m$) и могут существовать как в самофокусирующих, так и в дефокусирующих средах. Методом Хироты получена универсальная для случаев притяжения и отталкивания N-солитонная формула.

PACS: 03.50.–z, 42.65.–k

Эволюционная система связанных нелинейных уравнений Шредингера (СНШ-m)

$$i\hat{L}_j\psi_j^* = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}|\psi_k|^2\psi_j^*, \; j=\overline{1,m},$$
$$\psi_j \in \mathbf{C}, \; \hat{L}_j = \partial_\zeta + i\, c_j\partial_{\xi\xi}; \; a_{jk}, c_j \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

возникает в пределе слабой связи в различных нерелятивистских моделях нелинейной теории поля. Условия интегрируемости и точные решения СНШ-m представляют, наряду с академическим, широкий практический интерес (нелинейная оптика, плазма, ферромагнетизм, гидродинамика, атомарные конденсаты Бозе-Эйнштейна и др.[1-6]). Строгий математический вывод двух связанных параболических уравнений движения, эквивалентных системе (1) при $m = 2$ и $c_1 = c_2$, дан в [7], где изучено самовоздействие волн различной поляризации в нелинейных средах тензорного отклика. В (1) параметры c_j определяют дисперсию, а матричные коэффициенты a_{jk} при $j \neq k$ – и $j = k$ – нелинейные взаимо- и самодействие полей ψ_j, соответственно. В зависимости от смысла переменных ζ,ξ и знака произведения параметров $\mathrm{sign}(c_j a_{jk}) = æ_k$ система (1) на классическом уровне описывает пространственную или временную эволюцию m-компонентного поля в нелинейной куб-среде [7, 8]; на квантовом – бозе-газ с m цветовыми степенями свободы [9, 10] с притягивающим ($æ_k > 0$) или отталкивающим ($æ_k < 0$) точечным взаимодействием.

Точно интегрируемые в смысле Лиувилля случаи системы (1) весьма ограничены и требуют выполнения жестких условий в пространстве управляющих параметров c_j, a_{jk}. На основе теорем Захарова о дополнительных инвариантах движения можно показать (доказательство приведем в отдельной работе), что при выполнении условий $a_{jk} = \pm a_{kk}, c_j = \pm c$ система (1) допускает представление нулевой кривизны (пару Лакса) и вложима в схему метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Возникающие при этом интегрируемые редукции СНШ-m образуют семейство векторных моделей солитонов с унитарной $U(m)$ и псевдоунитарной $U(m,n)$ группами симметрии. Известные точные решения этого семейства моделей, например $U(2)$-векторной модели Манакова [8] ($L_0 = L_1 = L_2, \; \sigma = 2, \; \mu = 0$)

$$i\hat{L}_0\psi_j^* = æ(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_j^*, \; j=\overline{1,2}, \tag{2}$$

представляют собой "одноцветные" мультисолитоны: светлые ($\psi_{1,2,...} \sim \mathrm{sech}\alpha$) солитоны в самофокусирующей ($æ > 0$) [8] среде и темные ($\psi_{1,2,...} \sim \sim \mathrm{th}\,\beta$) – в дефокусирующей ($æ < 0$) [11, 12]. Светло-векторные [8] и темно-векторные [11, 12] солитонные решения, построенные на базе традиционных граничных задач $U(1)$-скалярных светлого ($\psi(\pm\infty) = 0$) и темного ($\psi(\pm\infty) = \rho\exp(i\Theta)$) солитонов [5, 13], можно считать, в этом смысле, тривиальным классом. Точные решения смешанных векторных солитонов в псевдоевклидовой $U(1,1)$-модели [9](МОЗР) и в евклидовой $U(1{+}1)$-модели (2) с дефокусирующей ($æ < 0$) нелинейностью [12](метод Хироты) показали, что взаимодействуют они также (как и $U(1)$-

[1)]e-mail: agalarov@itp.ac.ru

скалярные солитоны) упругим (тривиальным) образом.

В данной работе показано, что в семействе $U(m)$-векторных нелинейных моделей Шредингера (интегрируемые редукции системы (1))

$$i\hat{L}_0\psi_j^* = æ\sum_{k=1}^{m}|\psi_k|^2\psi_j^*,\ j=\overline{1,m}, \tag{3}$$

с граничными условиями смешанной плотности

$$\psi_\sigma(\zeta,\xi)\Big|_{|\xi|\to\infty}\longrightarrow 0, \quad \psi_\mu(\zeta,\xi)\Big|_{|\xi|\to\infty}\longrightarrow \rho_\mu e^{i\Theta_\mu} \tag{4}$$

при $m\geqslant 3$ существует класс точных решений – цветные $U(\sigma+\mu)$-векторные солитоны с нетривиальным взаимодействием (межмодовым обменом). Условия (4) означают, что каждая степень свободы $\psi_n(1\leqslant n\leqslant m)$ в системе (3) имеет свой нулевой, $\rho_n=0$, или конечной, $\rho_n\neq 0$, плотности ρ_n^2 вакуум (конденсат) с асимптотической фазой Θ_n. При этом $m=\sigma+\mu$, в остальном σ и μ принимают произвольные значения $1,2,...,m$.

N-солитонная формула m-компонентной системы (3)–(4) явно зависит от характера среды ($\mathrm{sign}\,æ=\pm 1$) и, в этом смысле, является универсальной как для самофокусирующих (притягивающих, $+1$), так и для дефокусирующих (отталкивающих, -1) сред куб-нелинейности.

МОЗР в случае системы (3), (4) сталкивается с необходимостью анализа структуры $(m+1)$-листных римановых поверхностей и, в этой связи, N-солитонное решение получено более экономным (в математическом смысле) методом Хироты [14]. Показано, что упругое (тривиальное) взаимодействие смешанных (светлого и темного) $U(1+1)$-векторных солитонов [9,12] является следствием факторизуемости N-солитонного решения системы (3), (4) в частном случае $m=2$. В ситуации общего положения N-солитонное решение не является факторизуемым и взаимодействие цветных мультисолитонов носит "неупругий" характер (изменяет форму при сохранении энергии). Найдены специальные случаи, когда обмен между нелинейными модами не возникает и N-солитонное рассеяние оказывается факторизуемым.

1. Введем функции Хироты

$$G_j=H\psi_j,\quad G_j\in\mathbf{C},\quad H\in\mathbf{R},\quad j=\overline{1,m},$$

и совершим переход ($\hat{L}_j\to\hat{D}_j$) от линейных $\hat{L}$ к билинейным операторам $\hat{D}$, определяемым как

$$\hat{D}\ (U\cdot V)=(\hat{D}\ U)V-U(\hat{D}\ V).$$

В дальнейшем переменным ζ и ξ в (1), (3), (4) придадим смысл времени t и координаты x.

С учетом масштабных изменений $|æ|=2$, $c_j=c(>0)$, $x\to x\sqrt{c}$ система (1) в представлении Хироты образует билинейное семейство компактной $U(m)$-симметрии:

$$\begin{gathered}\hat{D}_1G_j\cdot H=0,\quad j=\overline{1,m},\\ \hat{D}_2H\cdot H=2\delta\sum_k^m|\,G_k|^2\\ (\hat{D}_1=i\hat{D}_t+\hat{D}_2,\ \hat{D}_2=\hat{D}_x^2-\lambda),\end{gathered} \tag{5}$$

где $\lambda\in\mathbf{R}$ – произвольный параметр, который будет определен ниже; $\delta=\mathrm{sign}\,æ$.

В формализме билинейных операторов для функций G_j и H существует представление в виде рядов по формальному параметру ε. Выберем это представление таким образом, чтобы оно было согласовано с нетривиальными граничными условиями (4), а именно:

$$\begin{gathered}G_j=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{2\nu}(g_{0\mu}g_{2\nu}^{\mu}\delta_{j\mu}+\varepsilon g_{0\sigma}g_{2\nu+1}^{\sigma}\delta_{j\sigma}),\\ H=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{2\nu}h_{2\nu};\quad g_0^{\mu}=h_0=g_{0\sigma}=1,\\ \delta_{\alpha\beta}\text{ – символ Кронекера},\quad j=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{6}$$

Очевидно, что функции G_j определяют m-компонентное поле ($m{=}\sigma{+}\mu$) в произвольной комбинации σ и μ (например, σ светлых солитонов и μ темных). N-солитонное решение, описывающее развитие солитонов в системе (5), получим, следуя стандартной схеме Хироты ($R\sim G_j,H;\ j=\overline{1,m}$):

$$R=R_0\xrightarrow{\varepsilon^0}R_1\xrightarrow{\varepsilon^1}R_2\xrightarrow{\varepsilon^2}\ldots\xrightarrow{\varepsilon^{N-1}}R_N. \tag{7}$$

В нулевом порядке по ε положим вакуумное решение $g_{0\mu}=\rho_\mu\exp(i\Theta_\mu)$, $\Theta_\mu=k_\mu x-(k_\mu^2+\lambda)t$. Из (5) находим

$$\lambda=-2\delta\sum_{\mu}^{m-\sigma}\rho_\mu^2.$$

В физике оптических солитонов знаковая функция $\delta=\mathrm{sign}\,æ$ определяет самофокусирующий ($\delta=+1$) или дефокусирующий ($\delta=-1$) характер нелинейной среды. В первом порядке по ε имеем:

$$g_1^{(j)}=\sum_{n=1}^{N}\gamma_n^{(j)}\exp(\eta_n),\ \eta_n=\zeta_n x+i(\zeta_n^2+2\delta\sum_{\mu}^{m-\sigma}\rho_\mu^2)t,$$

где $\gamma_n^{(j)}$ и ζ_n – произвольные комплексные параметры. В односолитонном ($N=1$) секторе ряды (6) в схеме (7) обрываются во втором порядке по ε, в двухсолитонном ($N=2$) секторе – в 4-м порядке по

ε и т.д. Решения системы (5), описывающие динамику развития N-солитонов в двух σ и μ секторах $U(m)$-векторного ψ-пространства (фиксированные на 6-м порядке по ε), имеют следующий вид:

$$H\psi_\sigma = \sum_{n=1}^{N} \hat{\eta}_n \{\varepsilon^1 \gamma_n^\sigma + \sum_{ij}^{N} \hat{\eta}_i \hat{\eta}_j^* (\varepsilon^3 a_{nij}^\sigma + \varepsilon^5 \sum_{l,m}^{N} a_{nijlm}^\sigma \hat{\eta}_l \hat{\eta}_m^* + \dots, \tag{8}$$

$$H\psi_\mu = g_{0\mu} \{\varepsilon^0 + \sum_{ij}^{N} \hat{\eta}_i \hat{\eta}_j^* [\varepsilon^2 a_{ij}^\mu + \sum_{lm}^{N} \hat{\eta}_l \hat{\eta}_m^* (\varepsilon^4 a_{ijlm}^\mu + \varepsilon^6 \sum_{q,r}^{N} a_{ijlmqr}^\mu \hat{\eta}_q \hat{\eta}_r^* + \dots, \tag{9}$$

$$H = \varepsilon^0 + \sum_{ij}^{N} \hat{\eta}_i \hat{\eta}_j^* [\varepsilon^2 a_{ij} + \sum_{lm}^{N} \hat{\eta}_l \hat{\eta}_m^* (\varepsilon^4 a_{ijlm} + \varepsilon^6 \sum_{q,r}^{N} a_{ijlmqr} \hat{\eta}_q \hat{\eta}_r^* + \dots$$

Здесь параметр $\varepsilon = 1$ (R.Hirota), $\hat{\eta}_n = \exp(\eta_n)$;

$$a_{nij}^\sigma = \frac{\zeta_{ni}^-}{\zeta_{nj}\zeta_{ij}} (\gamma_n^\sigma \tilde{a}_{ij} - \gamma_i^\sigma \tilde{a}_{nj}),$$

$$a_{ijlm} = \frac{\zeta_{il}^- \bar{\zeta}_{jm}^-}{\zeta_{ij}\zeta_{im}\zeta_{lj}\zeta_{lm}} (\tilde{a}_{ij}\tilde{a}_{lm} - \tilde{a}_{im}\tilde{a}_{lj}),$$

$$a_{nijlm}^\sigma = \frac{\zeta_{ni}^- \zeta_{nl}^-}{\zeta_{nj}\zeta_{nm}} \gamma_n^\sigma a_{ijlm} + \left\{ \begin{array}{c} n \leftrightarrow i \leftrightarrow l \\ j \leftrightarrow m \end{array} \right\},$$

$$a_{ijlmqr} = \frac{\zeta_{qi}^- \zeta_{ql}^- \bar{\zeta}_{rj}^- \bar{\zeta}_{rm}^-}{\zeta_{qj}\zeta_{qm}\zeta_{ir}\zeta_{lr}} a_{ijlm} a_{qr} + \left\{ \begin{array}{c} q \leftrightarrow i \leftrightarrow l \\ r \leftrightarrow j \leftrightarrow m \end{array} \right\},$$

$$a_{\dots ij \dots}^\mu = z_{ij}^\mu a_{\dots ij \dots}, z_{ij}^\mu = -\frac{z_{i\mu}}{\bar{z}_{j\mu}}, z_{j\mu} = \zeta_j - ik_\mu, \tag{10}$$

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m-\mu} \gamma_i^\sigma \bar{\gamma}_j^\sigma}{\zeta_{ij}(\delta + \sum_{\mu}^{m-\sigma} \rho_\mu^2 / z_{i\mu}\bar{z}_{j\mu})}, \quad a_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij}}{\zeta_{ij}},$$

$$\zeta_{lm} = \zeta_l + \bar{\zeta}_m, \ \zeta_{lm}^- = \zeta_l - \zeta_m, \quad \bar{O} \equiv O^*, k_\mu \in \mathbf{R}.$$

Отсюда явно видно, что двухсолитонное ($N = 2$) решение обрывается на 4-м порядке по ε. В то же время можно убедиться, что формулы (8), (9) соответствуют точному трехсолитонному ($N = 3$) решению рассматриваемой системы (5). Решения более высокого порядка не приведены здесь из-за их громоздкости.

2. Односолитонное ($N = 1$) **решение** смешанной $U(\sigma+\mu)$-векторной нелинейной модели Шредингера (3), (4) из (8)–(10) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \psi_{\{\sigma\}} \\ \psi_{\{\mu\}} \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1^\sigma e^{\eta_1} \\ g_{0\mu}(1 + a_{11}^\mu e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1}) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где функция Хироты $H = 1 + a_{11} e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1}$,

$$a_{11}^{-1} = \zeta_{11}^2 (\delta + \sum_{\mu}^{m-\sigma} \rho_\mu^2 |z_{1\mu}|^{-2}) / \sum_{\sigma}^{m-\mu} |\gamma_1^\sigma|^2,$$

$$a_{11}^\mu = z_{11}^\mu a_{11}, \ z_{11}^\mu = -\exp(2i\phi_{1\mu}),$$

$$\phi_{1\mu} = \operatorname{arctg}((\operatorname{Im}\zeta_1 - k_\mu)/\operatorname{Re}\zeta_1).$$

Как видно, $U(\sigma+\mu)$-векторный солитон смешанного цвета (11) является динамико-топологическим образованием и в частных случаях совпадает с известными ранее одноцветными светло-векторными ($\psi_{\{\mu\}}=0$, $\delta=+1$) [8] и темно-векторными ($\psi_{\{\sigma\}}=0$, $\delta=-1$) [11, 12] солитонами. Однако принципиально новым является то, что точное решение (11), в отличие от векторных солитонов [8, 11, 12], имеет место в системе (3) как в случае притяжения (самофокусировки, $\delta=+1$), так и в случае отталкивания (дефокусировки, $\delta=-1$). Кроме того, следует отметить, что универсальный цветной $U(\sigma+\mu)$-векторный солитон (11) может находиться в нескольких состояниях, обусловленных его динамико-топологической природой. Удобно интерпретировать эти состояния в терминах частиц. Обозначим возможные изотопические состояния цветного $U(\sigma+\mu)$-векторного солитона (11) символом $\{\sigma, \mu\}$, где $\sigma+\mu=m$. Тогда, по аналогии с квантовой хромодинамикой, состояние со смешанным цветом ($\{\sigma\neq 0, \ \mu\neq 0\}$) можно считать "ароматным", а состояние с отсутствием смешивания ($\{0, \mu\}, \{\sigma, 0\}$) – "безароматным" (одноцветным). В этой аналогии $U(m)$-векторный солитон смешанного цвета имеет собственную структуру и существование различных состояний является естественным для такой составной частицы. Так, например, в случае $U(5)$-векторной нелинейной модели Шредингера решение (11) для одного $\{3, 2\}$ из 4-х возможных ($\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}, \{4, 1\}$) ароматных состояний цветного $U(3+2)$-векторного солитона имеет вид

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ (\psi_3\psi_4\psi_5)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(\operatorname{th} X + i\operatorname{tg}\phi_1)e^{i\Theta_1} \\ A_2(\operatorname{th} X + i\operatorname{tg}\phi_2)e^{i\Theta_2} \\ (B_3B_4B_5)^t \operatorname{sech} X e^{i\Theta} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Здесь

$$A_\mu = \rho_\mu \cos\phi_\mu, \Theta_\mu = k_\mu x - (k_\mu^2 - 2\delta \sum_{\mu=1}^{2} \rho_\mu^2) t + \phi_\mu,$$

$$\phi_\mu = \operatorname{arctg}((v - 2k_\mu)/u); \quad 2X = u(x - vt - x_0),$$

$$B_\sigma = \gamma^\sigma [(\sum_{\mu=1}^{2} A_\mu^2 + \delta u^2/4) / \sum_{\sigma=3}^{5} |\gamma^\sigma|^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$2\Theta = vx + (u^2 - v^2 + 8\delta \sum_{\mu=1}^{2} \rho_\mu^2) t/2;$$

$$\mu = 1, 2; \quad \sigma = 3, 4, 5;$$

где $u{=}2\mathrm{Re}\,\zeta_1$ и $v{=}2\mathrm{Im}\,\zeta_1$ – обратная ширина и скорость солитона. Видно, что смешанный $U(5)$-векторный солитон (12) состоит из двух темных (ψ_1, ψ_2) и трех светлых (ψ_3, ψ_4, ψ_5) компонент (нелинейных мод). Очевидно также, что число всех возможных состояний $U(5)$-векторного солитона равно 6, однако два из них являются безароматными (одноцветными) векторными солитонами: светло-векторный $\{5, 0\}$ в случае самофокусирующей среды $(\delta = +1)$ и темно-векторный $\{0, 5\}$ в случае дефокусирующей среды $(\delta = -1)$. Индуцированное взаимодействием компонент $\psi_1, \ldots, \psi_5$ изменение показателя преломления среды $\triangle n^2 \sim |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \ldots + |\psi_5|^2$ можно вычислить прямой подстановкой явного решения (12). Однако из билинейной системы уравнений (5) для всего семейства $U(m)$-векторных нелинейных моделей Шредингера следует универсальная формула

$$\triangle n^2 = \sum_\mu \rho_\mu^2 + \delta \frac{d^2}{dx^2} \ln H, \tag{13}$$

которая позволяет определить величину $\triangle n^2$ единой функцией Хироты H. Так, например, в случае рассмотренной выше $U(5)$-модели $\mu = \overline{1, 2}$, $H = 1 + a_{11} e^{\eta_1 + \bar\eta_1}$. Из (13) получим

$$\triangle n^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 \pm \left(\frac{u^2}{4}\right) \mathrm{sech}^2 \left[\frac{u(x - vt - x_0)}{2}\right]$$

для само(де)фокусирующей $(+(-))$ среды.

Следует отметить, что в дефокусирующей среде $(\delta{=}{-1})$ наличие в системе вакуума – конденсата с конечной плотностью ρ_μ^2 накладывает естественное ограничение на характеристики цветного векторного солитона:

$$u^2 \leqslant 4 \sum_\mu \rho_\mu^2 \cos^2 \phi_\mu.$$

Тем не менее, поскольку число возможных ароматных состояний цветного $U(m)$-векторного солитона равно $(m - 1)$, обнаружение в многомодовых оптических системах именно таких состояний может оказаться событием более вероятным, чем одноцветные состояния, число которых равно двум.

3. Двухсолитонное $(N = 2)$ решение и динамика взаимодействия мультисолитонов смешанного цвета. Покажем, что взаимодействие цветных мультисолитонов (8), (9) в смешанной $U(m)$-векторной нелинейной модели Шредингера (3), (4) является нетривиальным (изменяющим форму без потери энергии) при $m \geqslant 3$ и имеет место межмодовый обмен (энергией), пропорциональный интенсивностям нелинейных мод солитонов. Для этого изучим, без ограничения общности, асимптотическое $(t \to \pm\infty)$ поведение цветных мультисолитонов (8), (9) при $N = 2$.

Двухсолитонное $(N = 2)$ решение из (8), (9) принимает вид $(\sigma{+}\mu{=}m)$

$$\begin{pmatrix} \psi_{\{\sigma\}} \\ \psi_{\{\mu\}} \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1^\sigma e^{\eta_1} + \gamma_2^\sigma e^{\eta_2} + \sum\limits_j^2 a_{12j}^\sigma e^{\eta_1 + \eta_2 + \bar\eta_j} \\ g_{0\mu} (1 + \sum\limits_{i,j}^2 a_{ij}^\mu e^{\eta_i + \bar\eta_j} + a_{1122}^\mu e^{\eta_1 + \bar\eta_1 + \eta_2 + \bar\eta_2}) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где функция Хироты

$$H = (1 + \sum_{i,j}^2 a_{ij} e^{\eta_i + \bar\eta_j} + a_{1122} e^{\eta_1 + \bar\eta_1 + \eta_2 + \bar\eta_2}).$$

Пусть $v_1 > v_2 (\mathrm{Im}\,\zeta_1 {>} \mathrm{Im}\,\zeta_2)$, где v_n – скорость солитона S_j^n в j-й моде $(j{=}1, 2, \ldots, \mu, \mu{+}1, \ldots, \mu{+}\sigma)$. Решение (14) при $t \to \pm\infty$ на траекториях $\xi_n = x - v_n t$ отдельных солитонов S_j^n распадается на сумму свободных односолитонных решений типа (12):

$$\psi_{\{j\}}(x, t)\Big|_{t \to \pm\infty} = \sum_n C_j^{n\pm} S_{\{j\}}^n (x - v_n t, x_{0n}^\pm) e^{i\Theta_{nj}}. \tag{15}$$

Здесь $C_j^{n\pm}$ – амплитуда, $S_{\{j\}}^n$ – огибающая j-й моды n-го солитона $n = 1, 2;\ j = \sigma, \mu$:

$$S_{\{\sigma\}}^n = \mathrm{sech}\, Y_n^\pm,\ S_{\{\mu\}}^n = \mathrm{th}\, Y_n^\pm + i \mathrm{tg}\, \phi_{n\mu},$$
$$Y_n^\pm = u_n (x - v_n t - x_{0n}^\pm)/2,$$
$$\phi_{n\mu} {=} \mathrm{arctg}((v_n - 2k_\mu)/u_n),\ u_n{=}2\mathrm{Re}\,\zeta_n,\ v_n{=}2\mathrm{Im}\,\zeta_n.$$

Амплитуды $C_j^{n\pm}$ солитонов S_j^n до $(-)$ и после $(+)$ взаимодействия связаны соотношениями $C_j^{n+} = \hat S_j^n C_j^{n-}$, где $\hat S$ – специальная матрица, переводящая асимптотику при $t \to -\infty$ в асимптотику при $t \to +\infty$:

$$\begin{gathered} \hat S_\sigma^1 = \tilde\zeta_{12} (1 - s_1 \gamma_{21}^\sigma)(1 - s_1 s_2)^{-1/2}, \\ 2C_\sigma^{1-} = \gamma_1^\sigma (a_{11})^{-1/2}, \hat S_\mu^1 = e^{i(2\phi_{2\mu} - \pi)}, \\ C_\mu^{1-} = \rho_\mu \cos \phi_{1\mu} e^{i(\phi_{1\mu} + \pi)}, \\ \hat S_\sigma^2 = \tilde\zeta_{21} (1 - s_2 \gamma_{12}^\sigma)^{-1} (1 - s_1 s_2)^{1/2}, \\ 2C_\sigma^{2-} = a_{121}^\sigma (a_{1122} a_{11})^{-1/2}, \hat S_\mu^2 = e^{-i(2\phi_{1\mu} - \pi)}, \\ C_\mu^{2-} = \rho_\mu \cos \phi_{2\mu} e^{i(2\phi_{1\mu} + \phi_{2\mu})}; \\ \gamma_{ij}^\sigma = \tfrac{\gamma_i^\sigma}{\gamma_j^\sigma},\ s_1 = \tfrac{\tilde a_{12}}{\tilde a_{22}},\ s_2 = \tfrac{\tilde a_{21}}{\tilde a_{11}},\ |\tilde\zeta_{12}| = |\tilde\zeta_{21}| = 1. \end{gathered} \tag{16}$$

Отсюда явно видно, что скорости солитонов v_n – инварианты движения, а фазы $X_{0n}^\pm$ и амплитуды $C_j^{n\pm}$ таковыми не являются. Поскольку в ситуации общего положения $|\hat S_\sigma^n| \neq 1$ и $|\hat S_\mu^n| = 1$, то очевидно, что взаимодействие $U(\sigma{+}\mu)$-векторных солитонов смешанного цвета (14) носит нетривиальный характер. Как результат такого взаимодействия между нелинейными модами возникает обмен интенсивностями $\sim |\hat{S}_j^n|^2$. Межмодовый обмен инициирует перераспределение энергии в компонентах (нелинейных модах) цветных векторных солитонов. Однако эти обменные явления в σ- и μ-модах имеют свои особенности: σ-моды обмениваются конечной энергией $\sim |\hat{S}_\sigma^n|^2$ и сохраняют знак; μ-моды сохраняют энергию ($|\hat{S}_\mu^n|^2 = 1$), но изменяют свою полярность и приобретают дополнительный скачок фазы $\sim (2\phi_{n\mu}+\pi)$ в результате взаимодействия. Видно, что μ-моды взаимодействуют только с разными значениями фаз.

Асимптотический анализ в целом показывает, что обмен между компонентами отдельного цветного солитона является не произвольным (хаотическим), а коррелированным с соразмерными изменениями в компонентах всех остальных солитонов. Нетривиальное взаимодействие цветных мультисолитонов (14) и возможные сценарии межмодового обмена в системе (3), (4) регламентированы законами сохранения: a) $\sum_j^m |C_j^{n-}|^2 = \sum_j^m |C_j^{n+}|^2$ – суммарной интенсивности отдельного солитона S_j^n и b) $\sum_n(\sum_j |C_j^{n-}|^2) = \sum_n(\sum_j |C_j^{n+}|^2)$ – полной интенсивности всех солитонов до (–) и после (+) взаимодействия. Справедливость этих законов легко увидеть из асимптотических формул (16). Кроме того, возникающие в результате взаимодействия солитонов сдвиги их центров инерции $\triangle X_n = X_{0n}^+ - X_{0n}^-$, $\triangle X_n = (-1)^{n+1} 2\zeta_{nn}^{-1} \ln\chi$, где

$$\chi = |\tfrac{\zeta_1-\zeta_2}{\zeta_{12}}|^2 \sqrt{1 + \tfrac{\zeta_{11}\zeta_{22}}{|\zeta_1-\zeta_2|^2}(1-\epsilon)},$$

$$\epsilon = \frac{(\delta + \sum_\mu^{m-\sigma} \rho_\mu^2/|z_{1\mu}|^2)(\delta + \sum_\nu^{m-\sigma} \rho_\nu^2/|z_{2\nu}|^2) \sum_{\sigma,\tau}^{m-\mu} \gamma_1^\sigma \gamma_2^\tau \bar{\gamma}_1^\tau \bar{\gamma}_2^\sigma}{|\delta + \sum_\mu^{m-\sigma} \rho_\mu^2/z_{1\mu}\bar{z}_{2\mu}|^2 \sum_{\sigma,\tau}^{m-\mu} |\gamma_1^\sigma|^2 |\gamma_2^\tau|^2}, \tag{17}$$

подчиняются условию Судзуки-Захарова-Шабата (закон сохранения центра масс солитонов): $\zeta_{11}\triangle X_1 + \zeta_{22}\triangle X_2 = 0$. Последнее является следствием сохранения величины $I_{tot} = \int \sum_n |\psi_n|^2 dx$ во времени t. Приведенные выше законы сохранения и точные формулы позволяют определить "кинетику" обмена и возможные сценарии межмодовых переключений в системе цветных мультисолитонов (14) количественным образом. Однако обратим внимание на фактор ϵ в (17).

Из-за явных многочастичных эффектов в ϵ сдвиги центров инерции цветных солитонов $\triangle X_n$ не удовлетворяют традиционному для обычных солитонов свойству факторизации. Таким образом, в концентрированном виде ϵ указывает на сложную природу взаимодействия смешанных $U(\sigma+\mu)$-векторных солитонов (14). В ситуации общего положения (параметры солитонов $\gamma_n^j, \zeta_n, (z_{j\mu})$; плотности вакуумов ρ_μ^2 и число компонент $\sigma+\mu=m$ – произвольные) сдвиги $\triangle X_n$ солитонов из-за ϵ не могут быть представлены в двухчастичном виде, N-солитонное рассеяние не сводится к парному и взаимодействие смешанных $U(\sigma+\mu)$-векторных солитонов при $\sigma\geqslant 2$ является нетривиальным (изменяющим форму при сохранении энергии). В частном случае линейной зависимости параметров $\gamma_i^\sigma\gamma_j^\nu - \gamma_i^\nu\gamma_j^\sigma = 0$ их влияние на ϵ исчезает, вклад вакуумов симметризуется и сдвиги центров $\triangle X_n$ допускают двухчастичное представление. Следовательно, N-солитонное рассеяние факторизуется и взаимодействие солитонов становится упругим ($|\hat{S}_j^n|=1$, $j=\sigma,\mu$). Кроме того, из (17) прямо следует, что в специальном случае смешанной $U(2)$-модели Манакова [12] $\sigma=\mu=1$ взаимодействие смешанных $U(1+1)$-векторных солитонов является строго упругим. Во всех остальных случаях, при $m\geqslant 3$, цветные $U(\sigma+\mu)$-векторные солитоны ($m=\sigma+\mu$) взаимодействуют нетривиальным образом и между их нелинейными модами существует энергетический обмен, согласованный с указанными выше законами сохранения.

Авторы выражают благодарность В. Е. Захарову за внимание к работе, С. В. Манакову и В. Г. Марихину за полезные замечания. Работа частично выполнена в ИТФ им. Л. Д. Ландау.

1. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **113**, 1892 (1998).
2. Y. S. Kivshar and B. Luther-Davies, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).
3. F. T. Hioe, Phys. Rev. Lett. **82**, 1152 (1999).
4. B. A. Kalinikos, M. M. Scott, and C. E. Patton, Phys. Rev. Lett. **84**, 4697 (2000).
5. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, М.: Наука, 1986.
6. K. E. Strecker, G. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, Nature **417**, 150 (2002).
7. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).
8. С. В. Манаков, ЖЭТФ **65**, 505 (1973).
9. В. Г. Маханьков, О. К. Пашаев, ТМФ **53**, 55 (1982).
10. А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, ТМФ **66**, 47 (1986).
11. R. Radhakrishnan and M. Lakshmanan, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 2683 (1995).
12. A. P. Sheppard and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. **E55**, 4773 (1997).
13. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, М.: Наука, 1980.
14. R. Hirota, *Solitons*, Eds. R. K. Bullough and P. J. Coudrey, Berlin: Springer, 1980, p. 157.