

Копирование кубитов квантового компьютера

В. Н. Думачев¹⁾, С. В. Орлов

Воронежский институт МВД РФ, 394065 Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 29 июля 2002 г.

После переработки 9 сентября 2002 г.

Получена система унитарных преобразований, производящая две оптимальные копии произвольного входного кубита. Предложен алгоритм, позволяющий с помощью классической булевой алгебры находить любые унитарные преобразования, реализуемые квантовыми операторами CNOT.

PACS: 03.67.–a, 89.70.+c

Известно, что произвольное квантовое состояние

$$|\psi\rangle_0 = \alpha|0\rangle_0 + \beta|1\rangle_0 \quad (1)$$

не может быть точно скопировано. Доказательство теоремы неклонируемости кубитов дано в работе [1]. Однако Бужек и Хиллери в работе [2] нашли унитарное преобразование, которое запутывает два кубита $|\psi\rangle_{12} = |00\rangle_{12}$ с входным $|\psi\rangle_0$ таким образом, чтобы получить на выходе состояние

$$|\Psi^{out}\rangle = |\Phi_0\rangle_{01}|0\rangle_2 + |\Phi_1\rangle_{01}|1\rangle_2, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} |\Phi_0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}(2\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \beta|10\rangle), \\ |\Phi_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}(2\beta|11\rangle + \alpha|01\rangle + \alpha|10\rangle). \end{aligned} \quad (3)$$

Редуцированные операторы плотности кубитов ρ_0^{out} , ρ_1^{out} и ρ_2^{out} на выходе связаны с оператором плотности входа ρ^{in} соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_{0,1}^{out} &= \frac{5}{6}\rho^{in} + \frac{1}{6}\rho_{\perp}^{in}, \\ \rho_2^{out} &= \frac{2}{3}\rho^{in} + \frac{1}{3}\rho_{\perp}^{in}. \end{aligned}$$

Здесь $\rho_{\perp}^{in} = |\psi_{\perp}\rangle_0\langle\psi_{\perp}|$; $|\psi_{\perp}\rangle_0 = \alpha|1\rangle_0 - \beta|0\rangle_0$ – состояние, ортогональное исходному; $\alpha = e^{i\varphi} \sin(\vartheta/2)$, $\beta = \cos(\vartheta/2)$. О качестве полученных копий можно судить по точности копирования F , которая определяется перекрытием входного и выходного состояний [3]:

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \langle\psi^{in}|\rho^{out}|\psi^{in}\rangle \sin\vartheta d\vartheta.$$

Таким образом, выходные кубиты ρ_0^{out} и ρ_1^{out} на $\frac{5}{6}$ совпадают с входным ρ^{in} и имеют $\frac{1}{6}$ часть примеси.

¹⁾e-mail: dum@comch.ru

Кубит $|\psi\rangle_2$ является вспомогательным и носит название клонирующего. Аналитическое доказательство оптимальности представления выходных кубитов в виде (3) дано в работе [4]. Оптимальность понимается в том смысле, что средняя точность соответствия между входным и выходным кубитами является максимальной.

Последовательность действия для копирования кубитов представляется в виде универсальной квантовой клонирующей машины. Для ее работы предварительно необходимо приготовить запутанное состояние двух кубитов:

$$|\Psi^{prep}\rangle = C_1|00\rangle + C_2|01\rangle + C_3|10\rangle + C_4|11\rangle \quad (4)$$

с помощью последовательности действия унитарными операторами на нулевые кубиты:

$$|\Psi^{prep}\rangle = R_1(\theta_3)P_{21}R_2(\theta_2)P_{12}R_1(\theta_1)|00\rangle_{12}.$$

Здесь

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

– оператор поворота кубита;

$$P_{12}|x, y\rangle = |x, x \oplus y\rangle \quad (5)$$

– оператор CNOT, \oplus – сложение по модулю два. Полученная в результате этого система уравнений

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 &= C_1, \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 &= C_2, \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 &= C_3, \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 &= C_4, \end{aligned} \quad (6)$$

имеет решение

$$\cos^2\theta_1 = \frac{C_2^2 - C_3^2}{1 - 2C_3^2 - 2C_4^2} + \cos^2\theta_2 \frac{1 - 2C_2^2 - 2C_4^2}{1 - 2C_3^2 - 2C_4^2},$$

Таблица 1

| N | (C_1, C_2, C_3, C_4) | $\cos^2 \theta_1$ | $\cos^2 \theta_2$ | $\cos^2 \theta_3$ | $\text{sign}(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ | $ \Psi^{out}\rangle$ |
|-----|----------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1, 0)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{3}$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $(- - -, + + +)$ | $P_{21}P_{02}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + - +)$ | $P_{12}P_{20}P_{01} \Psi^{in}\rangle$ |
| 2 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $(+ + +, - + -)$ | $P_{21}P_{10}P_{02} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + + +)$ | $P_{10}P_{20}P_{02}P_{01} \Psi^{in}\rangle$ |
| 3 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 0, 1, 1)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $(+ + +, - + -)$ | $P_{12}P_{01}P_{20} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + + +)$ | $P_{01}P_{02}P_{20}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |
| 4 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $(- - -, + + +)$ | $P_{20}P_{10}P_{01}P_{02} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + - +)$ | $P_{21}P_{10}P_{02} \Psi^{in}\rangle$ |
| 5 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{3}$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $(+ + +, - + -)$ | $P_{12}P_{20}P_{01} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + + +)$ | $P_{21}P_{02}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |
| 6 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2, 0)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $(- - -, + + +)$ | $P_{01}P_{02}P_{20}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + - +)$ | $P_{12}P_{01}P_{20} \Psi^{in}\rangle$ |
| 7 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 0, 2)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $(+ + +, - + -)$ | $P_{12}P_{01}P_{20} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + + +)$ | $P_{01}P_{02}P_{20}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |
| 8 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, 1)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{3}$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $(+ + +, - + -)$ | $P_{21}P_{02}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + + +)$ | $P_{12}P_{20}P_{01} \Psi^{in}\rangle$ |
| 9 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 1, 2)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(\mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $(+ + +, - + -)$ | $P_{21}P_{10}P_{02} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + + +)$ | $P_{20}P_{10}P_{01}P_{02} \Psi^{in}\rangle$ |
| 10 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, 2)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{3}$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $(- - -, + + +)$ | $P_{21}P_{02}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + - +)$ | $P_{12}P_{20}P_{01} \Psi^{in}\rangle$ |
| 11 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 2, 1)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $(- - -, + + +)$ | $P_{20}P_{10}P_{02} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + - +)$ | $P_{20}P_{10}P_{01}P_{02} \Psi^{in}\rangle$ |
| 12 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 2, 1, 1)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | $(- - -, + + +)$ | $P_{12}P_{01}P_{20} \Psi^{in}\rangle$ |
| | | | | | $(+ + +, + - +)$ | $P_{01}P_{02}P_{20}P_{10} \Psi^{in}\rangle$ |

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{C_3^2 + C_4^2 - \cos^2 \theta_3}{1 - 2 \cos^2 \theta_3}, \quad (7)$$

$$\cos^2 \theta_3 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1 - 2C_3^2 - 2C_4^2}{1 - 4(C_1^2 C_4^2 + C_2^2 C_3^2)} \times \sqrt{1 - 4(C_1^2 C_4^2 + C_2^2 C_3^2) + 8C_1 C_2 C_3 C_4} \right).$$

На втором этапе квантовая копирующая машина смешивает входной кубит (1) с подготовленным состоянием (4)

$$|\Psi^{in}\rangle = |\psi\rangle_0 |\Psi^{prep}\rangle = \alpha(C_1|000\rangle + C_2|001\rangle + C_3|010\rangle +$$

$$+ C_4|011\rangle) + \beta(C_1|100\rangle + C_2|101\rangle + C_3|110\rangle + C_4|111\rangle), \quad (8)$$

таким образом, чтобы на выходе получить оптимальное состояние (2):

$$\begin{aligned} |\Psi^{out}\rangle &= |\Phi_0\rangle_{01}|0\rangle_2 + |\Phi_1\rangle_{01}|1\rangle_2 = \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}}(2\alpha|000\rangle + \beta|010\rangle + \beta|100\rangle + \\ &\quad + 2\beta|111\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|101\rangle). \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая (3) и (9), мы получим только 12 различных комбинаций допустимых параметров $C_1, C_2,$

C_3, C_4 , для которых решение (7) дает углы операторов $R_1(\theta_1, R_2(\theta_2), R_1(\theta_3)$ (см. 2, 3, 4 и 5 колонки табл.1). Шестая колонка табл.1 определяет знаки углов операторов поворота $R(\theta)$.

Теперь найдем преобразования, позволяющие получить из входного состояния (8) (при известных C_1, C_2, C_3, C_4) выходное состояние (9), используя только операторы (5) CNOT. Представим полный оператор преобразования как

$$|\Psi^{out}\rangle_{xyz} = P(x, y, z)|\Psi^{in}\rangle_{xyz} = |p_1(x, y, z), p_2(x, y, z), p_3(x, y, z)\rangle,$$

где $p_i(x, y, z)$ – логические функции трех булевых переменных.

Найдем данную функцию для первой строки табл.1.

Таблица 2

Истинности для функции p_i

| x | y | z | p_1 | p_2 | p_3 |
|-----|-----|-----|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | * | * | * |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | * | * | * |

Вместо звездочек здесь могут быть любые значения.

Поскольку оператором CNOT возможно реализовать только линейные булевы функции, то из 8 различных комбинаций нас удовлетворяют только две. Для одной из них запишем систему дизъюнктивных нормальных форм и представим в виде полиномов Жегалкина:

$$p_1 = \bar{x}\&y\&\bar{z} \vee \bar{x}\&y\&z \vee x\&\bar{y}\&\bar{z} \vee x\&\bar{y}\&z = x \oplus y,$$

$$p_2 = \bar{x}\&\bar{y}\&z \vee \bar{x}\&y\&z \vee x\&\bar{y}\&\bar{z} \vee x\&y\&\bar{z} = x \oplus z,$$

$$p_3 = \bar{x}\&\bar{y}\&z \vee \bar{x}\&y\&\bar{z} \vee x\&\bar{y}\&\bar{z} \vee x\&y\&z = x \oplus y \oplus z.$$

Тогда

$$|\Psi^{out}\rangle_{xyz} = |p_1, p_2, p_3\rangle = |x \oplus y, x \oplus z, x \oplus y \oplus z\rangle = P_{21}P_{02}P_{10}|\Psi^{in}\rangle_{xyz}.$$

Остальные строки таблицы заполняются аналогично. Для описания оператора CNOT с инверсией мы при-

няли обозначение

$$P_{1\bar{2}}|x, y\rangle = P_{12}|x, \bar{y}\rangle = |x, x \oplus \bar{y}\rangle = P_{12}R_2\left(\frac{\pi}{2}\right)|x, y\rangle,$$

где $R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – операция NOT.

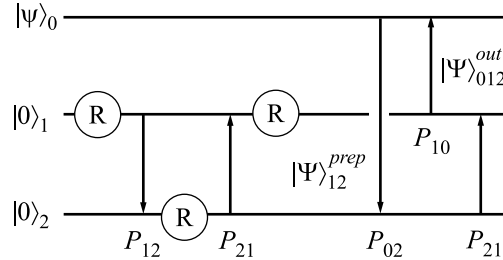


Схема оптимизированного варианта копирующей машины Бужека–Хиллери. Для получения выходного состояния $|\Psi\rangle_{012}^{out}$ из $|\psi\rangle_0$ и $|\Psi\rangle_{12}^{prep}$ только два оператора CNOT задействуют исходный кубит $|\psi\rangle_0$. Стрелка указывает кубит-цель оператора CNOT

Строка 2.2 из табл.1 описывает работу квантовой копирующей машины Бужека и Хиллери [5]. Строкой 2.1 описывается ее оптимизированный вариант. Видно, что для получения выходного состояния $|\Psi^{out}\rangle$ достаточно трех преобразований CNOT, из которых только два $P_{10}P_{02}$ задействуют исходный кубит (см. рисунок). Экваториальные кубиты первой строки исследованы в работе [6] без обсуждения способа их получения.

Таким образом, мы получили систему унитарных преобразований, позволяющих произвести две копии произвольного входного кубита. Это преобразование является оптимальным, поскольку максимизирует среднюю точность соответствия между начальными и конечными кубитами. В работе предложен алгоритм, позволяющий с помощью классической булевой алгебры находить любые унитарные преобразования, реализуемые квантовыми операторами CNOT.

1. W. K. Wootters and W. H. Zaker, Nature **299**, 802 (1982).
2. V. Buzek and M. Hillery, Phys. Rev. **A54**, 1844 (1996).
3. R. F. Werner, quant-ph/9804001.
4. N. Gisin and S. Massar, Phys. Rev. Lett. **79**, 2153 (1997).
5. V. Buzek and M. Hillery, Phys. Rev. **A56**, 1244 (1997).
6. Heng Fan, Keiji Matsumoto, Xiang-Bin Wang, quant-ph/0101101.