

Заряженные многочастичные комплексы: свойства непрямого триона

Д. В. Кулаковский*¹⁾, Ю. Е. Лозовик⁺¹⁾

* Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия,

⁺ Институт спектроскопии РАН, 142092 Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 23 сентября 2002 г.

Рассмотрена система взаимодействующих пространственно-разделенных экситонов и электронов. В этой системе исследовано образование пространственно-непрямого триона. Найдено асимптотическое поведение энергии связи этого заряженного многочастичного комплекса в пределе больших и малых межслойных расстояний. Рассчитано изменение энергии связи в результате экранирования двумерным электронным газом. Продемонстрировано, что при некоторой пороговой концентрации связанное состояние пространственно-разделенных экситона и электрона исчезает из спектра коллективных возбуждений.

PACS: 71.35.Cc, 78.66.Fd

Заряженные квазичастицы в полупроводнике – электроны и дырки – могут образовывать различные связанные комплексы, нейтральные или заряженные, которые также являются элементарными возбуждениями полупроводника [1–6]. В последние годы наблюдается большой интерес к этим проблемам в контексте заряженных коллективных возбуждений в двумерном электронном газе. Так например, отрицательно заряженный комплекс из трех квазичастиц – трион (X^-) в одиночной квантовой яме (КЯ) стал предметом исследования многочисленных теоретических и экспериментальных работ [6–13]. Данная задача является более сложной, чем для двухчастичных нейтральных комплексов, экситонов. Это связано в первую очередь с тем, что не существует возможность полного разделения движения центра масс и относительного движения в уравнении Шредингера. В связи с этим был развит формализм для решения трехчастичных проблем [6–11], который в некоторой степени позволил ответить на ряд вопросов о свойствах заряженных комплексов. С появлением качественных структур двойных КЯ возник новый круг проблем, связанных со свойствами комплексов пространственно-разделенных частиц – пространственно-непрямого экситона, триона и т.д. Исследование не прямых трионов уже проводилось в работах [14, 15], где было показано, что при достаточно низких температурах и малых межслойных расстояниях возможно образование связанного состояния экситона и электрона. Однако наличие в структурах электронного (или дырочного) каналов приво-

дит к экранированию кулоновского взаимодействия. В связи с этим в настоящей работе будут рассмотрены вопросы об энергии связи и поведении связанного трионного комплекса в присутствии двумерного электронного газа.

Используя формализм, примененный для описания пространственно-прямого триона, а также методы учета поляризационного электрон-экситонного взаимодействия на больших расстояниях, мы исследуем образование пространственно-непрямого триона. Рассмотрим систему, состоящую из двух слоев, в z -направлении находящихся на расстоянии D друг от друга. В одном слое находится двумерный экситон с характерным размером $a_B = \epsilon \hbar^2 / 2\mu e^2$, а в другом – электронный газ. Пренебрегая туннелированием, исследуем поведение данной системы пространственно-разделенных электрона и экситона как для случая малого межслойного расстояния ($D \ll a_B$), так и для большого D ($D \gg a_B$). Рассчитаем энергию связи триона как функцию D , а также рассмотрим исчезновение связанного состояния в результате экранирования двумерным электронным газом (2ДЭГ).

Вначале нас будет интересовать случай большого межслойного расстояния (верхняя вставка к рис.1а), то есть $D \gg a_B$. Гамильтониан такой системы в адиабатическом приближении, когда энергия связи прямого экситона много больше энергии взаимодействия этого экситона и электрона из другого слоя, может быть записан в следующем виде:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta - \frac{\hbar^2}{2M_{ex}} \Delta + U(r_1, r_2, D) + E(X), \quad (1)$$

¹⁾ e-mail: kulakovd@issp.ac.ru; lozovik@isan.troitsk.ru

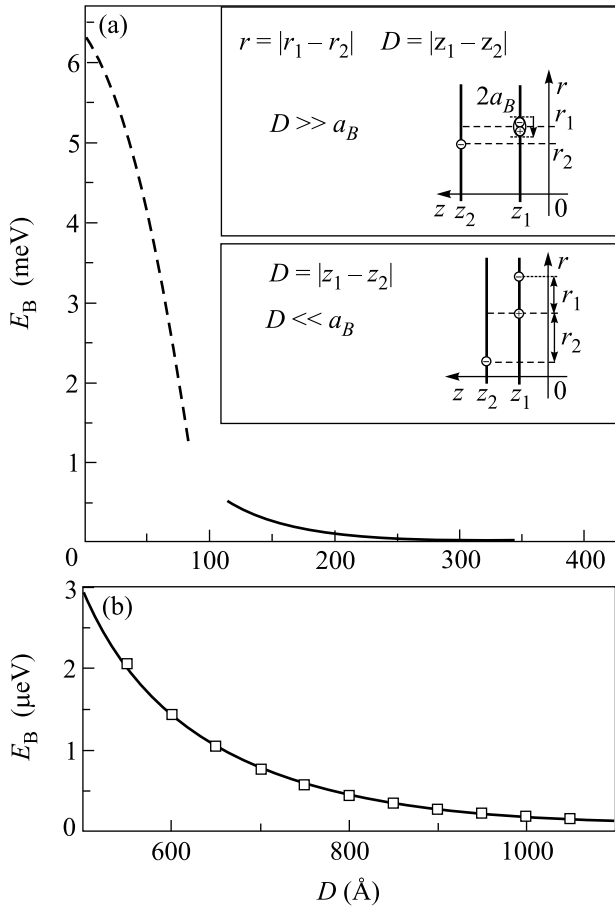


Рис.1. Зависимость энергии связи триона E_B , образованного пространственно-разделенными электроном и экситоном, в двухслойной системе на основе GaAs/AlGaAs в зависимости от расстояния между слоями (а). Сплошная линия вычислена в приближении $D \gg a_B$, штриховая – в приближении $D \ll a_B$. На вставках схематически показана система в случаях $D \gg a_B$ (верхняя вставка) и $D \ll a_B$, соответственно. На (b) изображена зависимость энергии связи триона для случая больших $D \gg a_B \rightarrow E_B \simeq \gamma/D^4$, найденная численным образом (сплошная линия) и аналитически по формуле (6) (светлые квадраты)

где $E(X)$ – энергия относительного движения экситона,

$$U(r_1, r_2, D) = -\frac{\gamma}{((r_1 - r_2)^2 + D^2)^2}, \quad \gamma = \frac{\alpha e^2}{2\epsilon} \quad (2)$$

– это поляризационное взаимодействие изолированных электрона и экситона, если радиус экситона много меньше расстояния D между слоями, α – поляризуемость двумерного экситона в основном состоянии, выражение для которой имеет вид $\alpha = 21a_B^3/16$ (см., например, [16]). Следовательно, параметр γ , входя-

щий в выражение для эффективной энергии взаимодействия в электрон-экситонной системе, равен

$$\gamma = \frac{21 e^2 a_B^3}{32 \epsilon}.$$

Здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, $M_{ex} = (m_e + m_h)$ – полная масса экситона; $m_e = 0.067m_0$, $m_h = 0.26m_0$ – эффективные массы в плоскости²⁾ электрона и дырки, соответственно.

Переходя к координатам относительного движения и центра масс триона, первоначальный гамильтониан запишется так:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M_{tr}} \Delta - \frac{\hbar^2}{2\mu_{tr}} \Delta - \frac{\gamma}{(r^2 + D^2)^2} + E(X), \quad (3)$$

где $M_{tr} = M_{ex} + m_e$, $\mu_{tr} = M_{ex}m_e/(M_{ex} + m_e)$. Энергию связи триона (X^-) найдем из уравнения Шредингера:

$$\hat{H}_{rel} \Psi(r, D) = E_B(X^-) \Psi(r, D), \quad (4)$$

где $\hat{H}_{rel} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{tr}} \Delta - \frac{\gamma}{(r^2 + D^2)^2}$ – гамильтониан относительного движения триона.

Сначала исследуем асимптотическое поведение решения при больших D ($D \rightarrow \infty$). Для этого экситон-электронное взаимодействие разложим следующим образом:

$$U(r, D) = -\frac{\gamma}{[r^2 + D^2]^2} \simeq -\frac{\gamma}{D^4} + \frac{2\gamma r^2}{D^6}. \quad (5)$$

После этого, как легко видеть, задача сводится к оцилляторному решению. Откуда сразу следует

$$E_n = -\frac{\gamma}{D^4} + \hbar\omega(n+1), \quad (6)$$

где $\omega = \frac{2}{D^2} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu D^2}}$. Для полного решения задачи (4) требуется численный расчет, поэтому запишем конечно-разностную схему для этого дифференциального уравнения:

$$\Psi_{i+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r_i}} \left\{ \Psi_i \left(2 + \frac{\Delta r}{r_i} - (\Delta r)^2 f_i \right) - \Psi_{i-1} \right\}, \quad (7)$$

$$f_i = \frac{2\mu_{tr}\gamma}{\hbar^2 a_B^2 (r_i^2 + d^2)^2} + \frac{2\mu_{tr} a_B^2}{\hbar^2} E_B(X^-),$$

$$r_i = \frac{r_i}{a_B}, \quad d = \frac{D}{a_B},$$

²⁾В этой работе мы будем использовать значения всех параметров для КЯ на основе GaAs/AlGaAs, $a_B = 63.8 \text{ \AA}$, $\epsilon = 12.86$.

с начальными и граничными условиями (так как $\frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{r=0} \cong \frac{\Psi_1 - \Psi_0}{\Delta r} = 0$, то $\Psi_1 = \Psi_0 = 1$)

$$\Psi_0 = 1, \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_N = 0. \quad (8)$$

Результат численного расчета энергии связи триона как функции межслойного расстояния изображен на рис.1а (сплошная линия). Асимптотическое поведение энергии связи X^- , полученное по формуле (6), представлено на рис.1б (светлые квадраты). Видно, что этот результат хорошо согласуется с полученным на основании численного решения уравнения (7) (сплошная линия на рис.1б) и дает основание говорить об асимптотическом поведении данной зависимости, как о $1/D^4$ при $D \rightarrow \infty$. Используя известное соотношение $\langle \partial \hat{H} / \partial \lambda \rangle = \partial E / \partial \lambda$, где λ – параметр, мы можем найти, что $\partial E_B(X^-) / \partial D < 0$, $\partial^2 E_B(X^-) / \partial D^2 > 0$ при $D \gg a_B$. Это означает, что энергия связи триона является убывающей вогнутой функцией по D , что и продемонстрировано на рис.1.

В многочастичной системе экситонов и электронов голое взаимодействие $U(r, D)$ следует заменить на эффективное $U_{\text{эф}}(r, D)$ (экранированное взаимодействие). Для двухкомпонентной системы взаимодействующих частиц эффективное взаимодействие в импульсном представлении имеет вид

$$U_{\text{эф}}(q, D) = \frac{U(q, D)}{1 + \Pi_1 V_1 + \Pi_2 V_2 + \Pi_1 \Pi_2 (V_1 V_2 - U(q, D)^2)}. \quad (9)$$

Здесь V_i – энергия взаимодействия между частицами i -сорта, $U(q, D) = -\gamma(\pi q/D)K_1(qD)$ – фурье-образ ($K_1(z)$ – функция Макдональда первого рода) взаимодействия между электроном и экситоном, Π_i – поляризационный оператор для частиц i -сорта ($i = 1, 2$). В нашем случае $i = 1$ соответствует экситонам, $i = 2$ – электронам. При выполнении условия низкой плотности экситонов, то есть $N_1 a_B^2 \ll 1$, вклад электронов в эффективное взаимодействие будет пренебрежимо малым, что дает основание учесть в (9) только его:

$$U_{\text{эф}}(q, D) = \frac{U(q, D)}{1 + \Pi_2 V_2}, \quad (10)$$

где $\Pi_2 = -(m_e/\pi \hbar^2) \left[1 - \Theta(q - 2k_F) \sqrt{1 - (2k_F)^2/q^2} \right]$ – поляризационный оператор в приближении хаотических фаз (ПХФ) при $T = 0$ [17, 18] ($k_F = \sqrt{2\pi N_s}$ – фермиевский волновой вектор), а $V_2 = 2\pi e^2/\epsilon q$. После того как мы нашли выражение для экранированного потенциала, вернемся к уравнению (7). Результатом его решения для экранированного электрон-экситонного взаимодействия (10)

является зависимость энергии связи триона от концентрации 2ДЭГ для межслойного расстояния $D = 200 \text{ \AA}$ (рис.2а). Хорошо видно, как пороговым

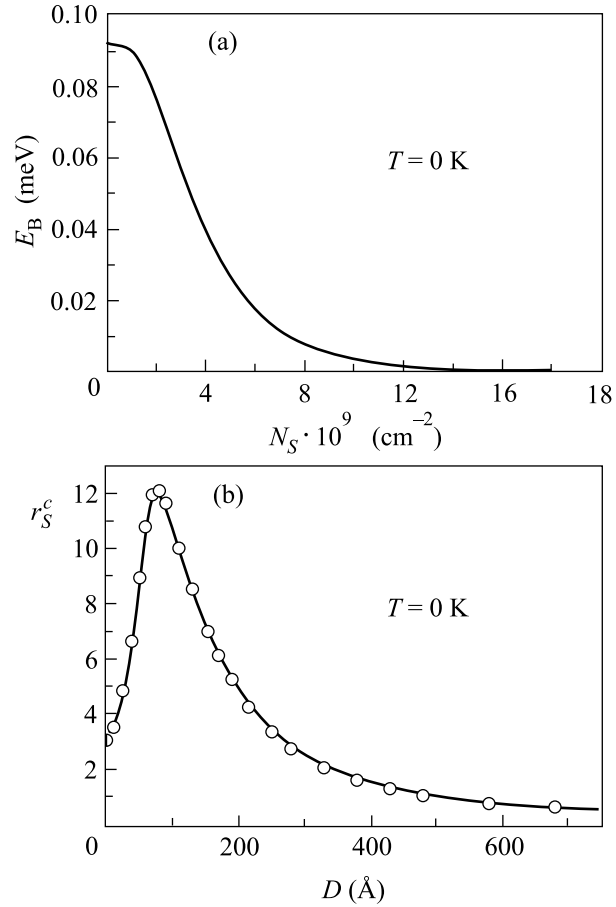


Рис.2. Энергия связи триона $E_B(X^-)$ как функция концентрации 2ДЭГ N_s для межслойного расстояния $D = 200 \text{ \AA}$ (а). На (б) изображена зависимость критического параметра $r_s^c = 1/a_B \sqrt{2\pi N_s}$, при котором связанное состояние пространственно-разделенных экситона и электрона (трион X^-) исчезает из спектра, от расстояния D между слоями. Эффекты экранирования учтены в приближении хаотических фаз

образом изменяется $E_B(X^-)$, а при значениях концентрации 2ДЭГ $N_s \sim 10^{10} \text{ см}^{-2}$ связанное состояние пространственно-разделенного электрона и экситона отсутствует в спектре³).

³Заметим, что расчет, произведенный для конкретного D , не ограничивает общности полученного ответа. Так для любого D , удовлетворяющего условию $D \gg a_B$, ответы будут аналогичны представленным, с той лишь разницей, что при увеличении межслойного расстояния увеличивается концентрация 2ДЭГ, при которой происходит разрушение триона, так как уменьшается эффективность экранирования электронным газом данного связанного состояния (см., например, [19]).

Теперь перейдем к случаю $D \ll a_B$ (см. нижнюю вставку на рис.1b), взаимодействие в системе имеет вид

$$U(r_1, r_2, \varphi, D) = -\frac{e^2}{\epsilon r_1} - \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{r_2^2 + D^2}} + \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + D^2 - 2r_1 \sqrt{r_2^2 + D^2} \cos(\varphi)}}, \quad (11)$$

где первые два члена определяют взаимодействие электронов с дыркой, а последний – электронов между собой. Рассмотрение этой системы произведем, аналогично атому H^- , в приближении Борна–Опенгеймера. Для этого в качестве нулевого приближения выберем гамильтониан двух невзаимодействующих экситонов:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{r_1} - \frac{e^2}{\epsilon r_1} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{r_2} - \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{r_2^2 + D^2}}. \quad (12)$$

Решение для прямого экситона – это водородоподобный спектр и волновые функции, поэтому для основного ($1S$) состояния имеем:

$$\psi_{1S}(r_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{(-r_1/a_B)}, \quad E_{1S} = -\frac{2\mu e^4}{\hbar^2 \epsilon^2}. \quad (13)$$

Взаимодействие в непрямом экситоне преобразуем следующим образом, воспользовавшись малым параметром D/a_B :

$$-\frac{e^2}{\epsilon \sqrt{r_2^2 + D^2}} = -\frac{e^2}{\epsilon r_2 \sqrt{1 + \left(\frac{D}{r_2}\right)^2}} \cong \cong -\frac{e^2}{\epsilon r_2} \left[1 - \frac{D^2}{2r_2^2}\right] = -\frac{e^2}{\epsilon r_2} + \frac{e^2 D^2}{2\epsilon r_2^3}. \quad (14)$$

Таким образом, мы можем применить теорию возмущения. В нулевом приближении имеем водородоподобный спектр, аналогично (11). Далее для вычисления поправок к $1S$ -состоянию мы должны выполнить процедуру записи правильных функций нулевого приближения, так как все состояния, начиная с $n = 2$, вырождены по полному орбитальному моменту [20]. Так, для состояний $2S$ и $2P$ получим правильные функции нулевого приближения:

$$\psi_a = c_1^+ \psi_{2S} + c_2^+ \psi_{2P}, \quad (15)$$

$$\psi_b = c_1^- \psi_{2S} + c_2^- \psi_{2P} \quad (16)$$

с собственными значениями энергии

$$E_{a(b)} = E_{2S} + \frac{1}{2} \left[W_{2S,2S} + W_{2P,2P} \pm \Delta W \right], \quad (17)$$

где

$$c_1 = \left\{ \frac{W_{2S,2P}}{2|W_{2S,2P}|} \left[1 \pm \frac{W_{2S,2S} - W_{2P,2P}}{\Delta W} \right] \right\}^{1/2}, \quad (18)$$

$$c_2 = \pm \left\{ \frac{W_{2P,2S}}{2|W_{2S,2P}|} \left[1 \mp \frac{W_{2S,2S} - W_{2P,2P}}{\Delta W} \right] \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

$$\Delta W = \sqrt{(W_{2S,2S} - W_{2P,2P})^2 + 4|W_{2S,2P}|^2}, \quad (20)$$

$$W_{ij} = \frac{2\pi e^2 D^2}{2\epsilon} \int \psi_i(r) \frac{1}{r^3} \psi_j(r) r dr, \quad (21)$$

в частности,

$$W_{1S,1S} = \frac{e^2 D^2}{\epsilon} \frac{[a_B - 2a \text{Ei}(1, 2a/a_B)] e^{(2a/a_B)}}{aa_B^4} e^{(-2a/a_B)},$$

$$W_{2S,2S} = \frac{e^2 D^2}{8\epsilon} \frac{[a_B - 2a \text{Ei}(1, 2a/a_B)] e^{(a/a_B)} + a/4}{aa_B^4} e^{(-a/a_B)},$$

$$W_{2S,2P} = \frac{e^2 D^2}{8\sqrt{12}\epsilon} \frac{[\text{Ei}(1, 2a/a_B) e^{(a/a_B)} - 1/2]}{a_B^4} e^{(-a/a_B)},$$

$$W_{2P,2P} = \frac{e^2 D^2}{96\epsilon} \frac{e^{(-a/a_B)}}{a_B^4}.$$

(Здесь $a \simeq 1.37D$ – это радиус, за пределами которого работает наше приближение, полученный из сравнения возмущения $e^2 D^2 / 2\epsilon r^3$ с исходным потенциалом $| -e^2 / \epsilon \sqrt{r^2 + D^2} |$; $\text{Ei}(m, x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^m} dt$ – это экспоненциальный интеграл [21].) Для примера приведем значения этих матричных элементов для межслойного расстояния $D = 20 \text{ \AA}$: $W_{1S,1S} = 11.54 \text{ мкэВ}$; $W_{2S,2S} = 1.24 \text{ мкэВ}$; $W_{2S,2P} = 0.32 \text{ мкэВ}$; $W_{2P,2P} = 0.18 \text{ мкэВ}$. Ограничиваясь поправками только от ближайших двух уровней ψ_a и ψ_b , что в данных условиях является хорошим приближением⁴⁾, получим для волновой функции и энергии основного состояния непрямого экситона следующий результат:

$$\tilde{\psi} = \psi_{1S} + \frac{W_{1S,a}}{\Delta E_{1S,a}} \psi_a + \frac{W_{1S,b}}{\Delta E_{1S,b}} \psi_b, \quad (22)$$

$$\tilde{E} = E_{1S} + W_{1S,1S}. \quad (23)$$

⁴⁾ Такое рассмотрение возможно в связи с тем, что вышеуказанные состояния входят с весовыми коэффициентами, такими, что $W_{1S,a} / \Delta E_{1S,a} \gg W_{1S,n} / \Delta E_{1S,n}$ для $n \geq 3$, и поэтому являются поправками более высокого порядка малости.

Здесь $\Delta E_{1S,a(b)} = E_{a(b)} - E_{1S}$ (см. формулы (11), (15), (18) и (19)). Таким образом, в качестве функции пространственно-непрямого триона нулевого приближения, принадлежащей энергии $E_{1S} + \tilde{E}$, возьмем

$$\psi_{tr}^{(0)}(r_1, r_2) = \psi_{1S}(r_1)\tilde{\psi}(r_2). \quad (24)$$

Уровень энергии возмущенной системы определяется в первом порядке теории возмущения, как обычно, по формуле

$$E(X^-) = E_{1S} + \tilde{E} + \langle \psi_{tr}^{(0)} | U_{e-e} | \psi_{tr}^{(0)} \rangle, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} & \langle \psi_{tr}^{(0)} | U_{e-e} | \psi_{tr}^{(0)} \rangle = \\ & = \frac{2\pi e^2}{\epsilon} \int \frac{|\psi_{1S}(r_1)|^2 |\tilde{\psi}(r_2)|^2 r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + D^2 - 2r_1 r_2 \sqrt{r_2^2 + D^2} \cos(\varphi)}}. \end{aligned}$$

В результате для энергии связи триона при $D \ll a_B$ получается следующая формула:

$$E_B(X^-) = \frac{2\mu e^4}{\hbar^2 \epsilon^2} - W_{1S,1S} - \langle \psi_{tr}^{(0)} | U_{e-e} | \psi_{tr}^{(0)} \rangle,$$

которая дает зависимость, представленную на рис.1а (штриховая линия). При $D \rightarrow 0$ значение $E_B(X^-)$ стремится к энергии связи двумерного триона [22, 23], а в области $60 \text{ \AA} \geq D \geq 120 \text{ \AA}$ для сшивания с решением, полученным в приближении $D \gg a_B$, задача требует численного моделирования с исходным потенциалом (11). Этот расчет является достаточно громоздким и не представляет большого интереса в рамках данной работы, поэтому может быть рассмотрен отдельно.

Последний вопрос, который мы рассмотрим в данной работе, это экранирование электрон-дырочного и электрон-электронного взаимодействий в многочастичной системе электронов для малых значений межслойного расстояния. Так как в этой области мы рассматривали систему как два слабозадействующих экситона, то перенормировка потенциалов в первую очередь относится к экситонообразующим взаимодействиям. Таким образом, нас интересует экранирование прямого экситона двумерным электронным газом, находящимся в другом слое, а также пространственно-непрямого экситона. Обе эти задачи были рассмотрены в работе [24], где были найдены зависимости критических безразмерных параметров r_s^c в зависимости от межслойного расстояния. В результате, объединяя результаты для различных D , мы можем построить единую картину (рис.2b) для

критического параметра r_s^c , при котором связанное состояние пространственно-разделенных экситона и электрона исчезает из спектра коллективных возбуждений. На этом рисунке мы видим эффект уменьшения, а затем увеличения пороговой концентрации 2ДЭГ. Это связано, как и в [24], с конкуренцией двух механизмов. А именно, с ростом межслоевого расстояния происходит уменьшение затравочного взаимодействия электрона и дырки, а также уменьшение эффективности экранирования дырки, пространственно-отделенными электронами.

В данной работе решена задача о связанном состоянии пространственно-разделенных экситона и электрона, то есть триона X^- . Исследовано поведение данной системы в двух предельных случаях $D \ll a_B$ и $D \gg a_B$. В первом случае задача решалась аналогично задаче о связанном состоянии H^- в приближении Борна–Опенгеймера. Во втором мы рассматривали экситон-электронное взаимодействие как взаимодействие электрона с диполем, что является хорошим приближением, когда размеры экситона много меньше расстояния между экситоном и электроном. Найдена энергия связи триона для различных межслойных расстояний. Изучен также вопрос об экранировании данного связанного состояния двумерным электронным газом. В результате нами построена зависимость от D критического параметра r_s^c , при котором связанное состояние пространственно-разделенных экситона и электрона исчезает из спектра коллективных возбуждений. Суммируя полученные результаты, мы можем предполагать, что это связанное состояние при низких температурах ($T < E_B(X^-)$) может быть исследовано экспериментально. Так, например, в транспортных измерениях наличие пространственно-непрямого триона приведет к уменьшению подвижности электронной подсистемы, так как масса центра масс триона в плоскости много больше массы свободного электрона.

Работа была поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований и INTAS.

1. R. S. Knox, *Theory of Excitons*, Solid State Physics, Supplement 5, Academic Press, New York, 1963.
2. R. J. Elliott, *Polarons and Excitons*, Edinburgh – London, 1963; Phys. Rev. **124**, 340 (1961).
3. R. J. Elliott and R. Loudon, J. Phys. Chem. Sol. **8**, 382 (1959).
4. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **52**, 717 (1967).
5. M. A. Lampert, Phys. Rev. Lett. **1**, 450 (1958).

6. J. J. Palacios, D. Yoshioka, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B54**, R2296 (1996).
7. A. B. Dzyubenko and A. Yu. Sivachenko, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4429 (2000).
8. A. B. Dzyubenko, *Phys. Rev.* **B65**, 38318 (2002).
9. O. Homburg, K. Sebal, P. Michler et al., *Phys. Rev.* **B62**, 7413 (2000).
10. C. Riva, F. M. Peeters, and K. Varga, *Phys. Rev.* **B61**, 13873 (2000).
11. A. Esser, E. Runge, R. Zimmermann, and W. Langbein, *Phys. Stat. Sol. (b)* **221**, 281 (2000).
12. B. Stébé, G. Munsch, L. Stauffer et al., *Phys. Rev.* **B56**, 12454 (1997).
13. V. P. Kochereshko, G. V. Astakhov et al., *Phys. Stat. Sol. (b)* **220**, 345 (2000).
14. V. S. Babichenko and M. N. Kiselev, *J. of the Phys. Soc.* **2**, 311 (1992).
15. В. С. Бабиченко, М. Н. Киселев, *Письма в ЖЭТФ* **57**, 174 (1993).
16. Ю. Е. Лозовик, М. В. Никитков, *ЖЭТФ* **112**, 1791 (1997).
17. F. Stern, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 546 (1967).
18. Lian Zheng and A. H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B49**, 5522 (1994).
19. Д. В. Кулаковский, С. И. Губарев, Ю. Е. Лозовик, *ЖЭТФ* **121(4)**, 1 (2002).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, (1989).
21. И. С. Гранштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Наука, 1971.
22. A. I. Bobrysheva, M. V. Grodetski, and V. T. Zyukov, *J. Phys.* **C16**, 5723 (1983).
23. A. Thilagam, *Phys. Rev.* **B55**, 7804 (1997).
24. Д. В. Кулаковский, Ю. Е. Лозовик, *ЖЭТФ* (в печати).