О пропускной способности последовательного релятивистского квантового канала связи с ограниченным временем наблюдения

С. Н. Молотков

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 24 сентября 2002 г.
После переработки 9 октября 2002 г.

Показано, что нелокализуемость состояний в квантовой теории поля приводит к неизбежности учета тождественности частиц. Данное обстоятельство, вместе с конечной предельной скоростью, приводит к тому, что формулы для пропускной способности нерелятивистских каналов связи имеют асимптотический характер (справедливы формально лишь при бесконечной раздвижке между посылками, когда тождественностью частиц можно пренебречь, и соответственно бесконечно медленной скоростью передачи во времени – бит/с·посылка). Получена величина пропускной способности последовательного релятивистского квантового канала связи с учетом тождественности частиц и в реальном времени.

PACS: 03.65.Bz, 42.50.Dv, 89.70.+c

Одним из основных параметров канала связи является его пропускная способность [1]. Пропускная способность определяет верхнюю границу скорости передачи информации через канал связи и является, по сути, числом бит (≤ 1) в пересчете на одну посылку, которое может быть передано при достаточно длинной последовательности со сколь угодно малой вероятностью ошибки.

Классическая теория информации формулируется в терминах статистических ансамблей [1]. Входными величинами дискретного канала являются символы алфавита, которые посылаются в канал с определенными вероятностями. Сам канал описывается переходными вероятностями между входом и выходом для каждого символа [1, 2]. При этом физическая природа носителей информации, ассоциированных с символами алфавита, не конкретизируется, но неявно подразумевается, что каждому символу соответствует некоторый классический объект (сигнал).

В случае нерелятивистского квантового канала связи входным объектом является квантовый ансамбль [3 – 6]. Символам алфавита сопоставляются матрицы плотности посылаемые в канал связи с определенными вероятностями. Формальное описание квантового канала связи сводится к заданию отображения (супероператора), переводящего входные матрицы плотности в выходные [3 – 6]. Если имеется в виду передача классической информации через квантовый канал связи, а не передача самого квантового состояния как такового, то на приемном конце извлечение классической информации происходит посредством измерений. Обзор результатов по квантовым теоремам кодирования приведен в прекрасном обзоре Холево [4]. Физическая природа носителей информации также не конкретизируется.

Важнейшей характеристикой канала связи является его пропускная способность в реальном времени. Обычная трактовка пропускной способности как “скорости” (числа бит на одну посылку) не имеет отношения к скорости передачи в реальном времени, поскольку само время в постановке задачи отсутствует. Неявно подразумевается, что символы алфавита передаются с определенной частотой. При таком подходе для классического нерелятивистского канала связи не возникает логических противоречий, поскольку классические сигналы, отвечающие символам алфавита, могут быть измерены сколь угодно быстро (мгновенно), поэтому скорость передачи в единицу времени определяется только частотой следования символов (если нет дополнительных ограничений на свойства канала связи, например, его полосу пропускания).

Принципиально иная ситуация возникает в релятивистской квантовой механике, которая из-за отсутствия осмысленной интерпретации сразу возникает как квантовая теория поля [7 – 9]. Вектор состояния $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$, описывающий квантовую систему, должен иметь носитель (амплитуду – сглаживающую функцию), зависящий от пространственно-временного аргумента. Амплитуда определяется своими значениями на массовой поверхности, что приводит к нелокализуемости последней как для безмассовых, так и массивных частиц в пространстве-времени Минковского [10, 11]. Нелокализуемость означает, что амплитуда отлична от нуля во всем пространстве (вне любого компакта), поэтому взятие следа по пространственным степеням свободы требует доступа ко всему пространству. Последнее из-за наличия предельной скорости в отличие от нерелятивисткого случая не является безобидной операцией и приводит к реальным физическим последствиям – доступ ко всему пространству требует бесконечного времени. В любой реальной ситуации измерения проводятся в ограниченной пространственно-временной области, поэтому существует принципиальный вопрос о том, как зависит пропускная способность канала связи от квантового состояния (пространственно-временной амплитуды), пространственно-временных областей, где проводятся измерения, а также от системы отсчета.

Если амплитуды состояний не могут быть строго локализованными (по-крайней мере для свободных полей это именно так), то состояния, посылаемые последовательно в канал связи, не могут считаться независимыми из-за неизбежного перекрытия. Пространство состояний в этом случае не описывается тензорным произведением пространств состояний для отдельных посылок ($\mathcal{H}^{\otimes n}$), а должно описываться либо симметризованным (для бозонов, $Sym\mathcal{H}^{\otimes n}$), либо антисимметризованным (для фермионов, $Asym\mathcal{H}^{\otimes n}$) тензорным произведением. Тождественные частицы можно считать различимыми в отдельных посылках и эффективно описывать пространство состояний как обычное тензорное произведение лишь при бесконечной раздвижке между отдельными посылками. Однако в этом случае скорость передачи во времени (бит/с) будет равна нулю из-за наличия предельной скорости.

Обобщенные функции с операторными значениями представляются в виде [7–9]

$$\hat{\varphi}^{+}_{\mu}(\hat{x}) = \int d\hat{k} e^{i\hat{k}\hat{x}} a^{+}_{\mu}(\hat{k})\theta(k_0)\delta(\hat{k}^2), \qquad \hat{k} = (k_0, k), \quad \hat{x} = (x, t); \tag{1}$$

здесь $\mu = 0, 1$ – индекс спиральности. Обобщенные базисные векторы (линейные непрерывные функционалы в $\mathcal{H}$)

$$a^{+}_{\mu}(\hat{k})0\rangle = |k\mu\rangle, \quad |\hat{x}\mu\rangle = \varphi_{\mu}(\hat{x})|0\rangle,$$
$$\langle k\mu|k'\mu'\rangle = k_0\delta_{\mu\mu'}\delta(k-k'), \tag{2}$$
$$[a^{-}_{\mu'}(\hat{k}'), a^{+}_{\mu}(\hat{k})] = k_0\delta(k-k')\delta_{\mu,\mu'},$$

где $|0\rangle$ – вакуумный вектор, и $|k\mu\rangle$, $|\hat{x}\mu\rangle \in \Omega^*$ – пространство, сопряженное пространству основных функций Ω. Физические состояния (векторы в $\mathcal{H}$) получаются как результат сглаживания обобщенных операторных функций с основными функциями (амплитудами) из пространства $\Omega(\hat{x})$ (пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой обратной степени полинома):

$$|\varphi_{\mu}\rangle = \sum_{\mu}\int d\hat{x}\tilde{\varphi}_{\mu}(\hat{x})\varphi^{+}_{\mu}(\hat{x})|0\rangle = \sum_{\mu}\int\frac{dk}{k_0}\tilde{\varphi}_{\mu}(k, k_0 = |k|)|k\mu\rangle, \tag{3}$$

здесь амплитуда $\tilde{\varphi}_{\mu}(\hat{x})$ ($\tilde{\varphi}(k, k_0 = |k|)$) играет роль коэффициента разложения по обобщенным базисным состояниям. Конструкция $\tilde{\varphi}_{\mu}(\hat{x}) \in \Omega(\hat{x})$, $\hat{\varphi}_{\mu}(\hat{x}) \in \Omega^*(\hat{x})$, $|\varphi_{\mu}\rangle \in \mathcal{H}$ и $\Omega \subset \mathcal{H} \subset \Omega^*$ называется оснащенным гильбертовым пространством (тройкой Гельфанда) [8,13].

Далее будем рассматривать состояния поля, распространяющиеся в одном направлении оси x ($k > 0$), именно такие состояния переносят информацию между удаленными пользователями,

$$|\varphi_{\mu}\rangle = \int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\tilde{\varphi}(k,k)|k\mu\rangle = \int_0^{\infty} dk\varphi(k)|k\mu\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d(x-t)\varphi(x-t)|x-t,\mu\rangle, \tag{4}$$

где

$$\varphi(k) = \frac{\tilde{\varphi}(k,k)}{\sqrt{k}}, \ \varphi(x-t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ik(x-t)}\varphi(k)dk, \qquad |x-t,\mu\rangle = \int_0^{\infty} e^{ik(x-t)}|k\mu\rangle dk, \tag{5}$$

и условие нормировки

$$\langle\varphi_{\mu}|\varphi_{\mu}\rangle = \int_0^{\infty}\frac{dk}{k}|\tilde{\varphi}(k,k)|^2 = \int_0^{\infty} dk|\varphi(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d(x-t)|\varphi(x-t)|^2 = 1. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь вопрос о допустимой степени локализуемости амплитуды на ветви светового конуса. Условие квадратичной интегрируемости (нормировки) $\varphi(k)$ приводит к ограничениям на допустимую степень убывания $\varphi(\tau)$ на бесконечности ($\tau \to \infty$). Ответ дается теоремой Винера–Пэли [14]. Для квадратично-интегрируемой функции $\varphi(k)$, равной нулю на полуоси ($k < 0$), но не равной нулю тождественно, следующий интеграл должен сходиться:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\varphi(\tau)|}{1+\tau^2}d\tau < \infty. \tag{7}$$

Отсюда следует, что амплитуда $\varphi(\tau)$ на световом конусе не может спадать экспоненциально, но может спадать сколь угодно близко к экспоненте $|\varphi(\tau)| \sim \exp\{-\alpha|\tau|/\ln(\ln(\ln\ldots\ln|\tau|))\}$ ($\alpha > 0$ любое), то есть состояния нелокализуемы (отличны от нуля вне любого компакта).

Рассмотрим теперь передачу классической информации при помощи квантованного безмассового поля. Из-за нелокализуемости принципиально невозможно ограничиться однофотонными состояниями в случае последовательного канала связи. Будем рассматривать бинарный алфавит $\{0,1\}$ с априорными вероятностями $\{\pi_0,\pi_1\}$, которому сопоставляются квантовые состояния с поляризациями $\{\nu_0,\nu_1\}$ в общем случае неортогональными. Чтобы избежать излишней громоздкости, пространственные амплитуды для разных поляризаций будем считать одинаковыми, результаты могут быть несложно обобщены на произвольные амплитуды. Отдельные сообщения длины n состоят из последовательно посылаемых в канал связи однофотонных состояний через интервал τ_0. Более точно, сообщение длины n описывается n-фотонным вектором состояний, компоненты которого выбираются с вероятностями $\{\pi_0,\pi_1\}$:

$$|\varphi_{\boldsymbol{\nu}}\rangle = A_n\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty dk_1dk_2\ldots dk_n\varphi_1(k_1)\times \\ \times\varphi_2(k_2)\ldots\varphi_n(k_n)|k_1\nu_1,k_2\nu_2,\ldots k_n\nu_n\rangle, \tag{8}$$

$$\varphi_m(k_m)=\varphi(k_m)e^{ik_m\tau_0(m-1)},\quad \boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2\ldots\nu_n),$$

где разложение ведется по обобщенным базисным векторам из Ω^*:

$$|k_1i_1,k_2i_2,\ldots k_ni_n\rangle = a^+_{i_1}a^+_{i_2}(k_2)\ldots a^+_{i_n}(k_n)|0\rangle, \\ i_m=+,-\quad m=1\ldots n, \tag{9}$$

и

$$a^+_{\nu_i}(k_i)=\alpha_{\nu_i}a^+_+(k_i)+\beta_{\nu_i}a^+_-(k_i), \\ i=0,1,\quad |\alpha_{\nu_i}|^2+|\beta_{\nu_i}|^2=1, \tag{10}$$

индексы $i_m=+,-$ обозначают ортогональные базисные состояния поляризации. Обобщенные базисные состояния являются полностью симметричными по перестановкам частиц [7–9]. В импульсном представлении имеем (см. детали, например, в [8])

$$|k_1j_1,k_2j_2,\ldots,k_nj_n\rangle=\sqrt{\frac{k_1k_2\ldots k_n}{n!}}\times \\ \times\sum_{\{i\}}\delta_{j_1,j_{i_1}}\delta(k_1-q_{i_1})\ldots\delta_{j_n,j_{i_n}}\delta(k_n-q_{i_n}), \tag{11}$$

где $j_l, j_{i_l}=+,-$. Суммирование ведется по всем перестановкам частиц (символ $\{i\}$). И условие ортогональности обобщенных базисных векторов

$$\langle k_1j_1,k_2j_2,\ldots k_nj_n|k'_1j'_1,k'_2j'_2,\ldots k'_mj'_m\rangle=\delta_{n,m}k_1k_2\ldots k_n\sum_{\{i\}}\delta_{j_1,j'_{i_1}}\delta(k_1-k'_{i_1})\ldots\delta_{j_n,j'_{i_n}}\delta(k_n-k'_{i_n}). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь условие нормировки n-фотонных векторов сообщений длины n. Для того, чтобы более четко увидеть отличие ситуации с тождественными частицами от ситуации различимых частиц, на время будем считать, что информация кодируется в ортогональные состояния поляризации (в (11) $j_i=+,-$). Имеем

$$\langle\varphi_{\mathbf{j}}|\varphi_{\mathbf{j}'}\rangle=A_n^2\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty dk_1\ldots dk_n\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty dk'_1\ldots dk'_n\varphi_1^*(k_1)\varphi_1(k'_1)\ldots\varphi_n^*(k_n)\varphi_n(k'_n)\times \tag{13}$$

$$\langle k_1j_1,k_2j_2,\ldots k_nj_n|k'_1j'_1,k'_2j'_2,\ldots k'_mj'_m\rangle=$$

$$=A_n^2\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty dk_1\ldots dk_n\sum_{\{i\}}\delta_{j_1,j'_{i_1}}\varphi_1^*(k_1)\varphi_1(k_1)e^{ik\tau_0(i_1-1)}\ldots\delta_{j_n,j'_{i_n}}\varphi_n^*(k_n)\varphi_n(k_n)e^{ik_n\tau_0(i_n-n)}=$$

$$=A_n^2\sum_{\{i\}}\int_{-\infty}^\infty d\tau_1\delta_{j_1,j'_{i_1}}\varphi^*(\tau_1)\varphi(\tau_1-\tau_0(i_1-1))\ldots\int_{-\infty}^\infty d\tau_n\delta_{j_n,j'_{i_n}}\varphi^*(\tau_n)\varphi(\tau_n-\tau_0(i_n-n)).$$

Напомним, что принята нормировка одночастичной амплитуды на единицу (7). Для тождественных частиц и из-за принципиальной нелокализуемости перекрытия в различных позициях будут равны нулю формально лишь при $\tau_0 = \infty$.

Найдем сначала пропускную способность для случая, когда время наблюдения неограничено (формально равно бесконечности – доступна вся ветвь светового конуса по τ), а затем обобщим результаты на конечное время. Рассмотрим теперь прямую теорему кодирования для источника.

Матрица плотности, отвечающая кодовому слову из случайного набора из M слов, имеет вид

$$\rho^{(n)}_{\boldsymbol{\nu}_j} = |\varphi_{\boldsymbol{\nu}_j}\rangle\langle\varphi_{\boldsymbol{\nu}_j}|, \quad \boldsymbol{\nu}_j = (\nu_{1j}, \ldots, \nu_{nj}), \quad j = 1\ldots M, \tag{14}$$

которая при усреднении $\mathbf{E}$ по всевозможным случайным наборам кодовых слов дает полную матрицу плотности всевозможных сообщений длины n:

$$\rho^{(n)} = \mathbf{E}(\rho^{(n)}_{\boldsymbol{\nu}_j}) = \sum_{\boldsymbol{\nu}} P_{\boldsymbol{\nu}}|\varphi_{\boldsymbol{\nu}}\rangle\langle\varphi_{\boldsymbol{\nu}}|,$$
$$P_{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{i_1,\ldots i_n} \pi_{\nu_{i_1}}\ldots\pi_{\nu_{i_n}}, \quad i_m = 0, 1, \tag{15}$$

где $P_{\boldsymbol{\nu}}$ вероятность состояния $|\varphi_{\boldsymbol{\nu}}\rangle$. Приведем $\rho^{(n)}$ к диагональному виду:

$$\rho^{(n)} = \sum_{\mathbf{J}} \lambda_{\mathbf{J}}|\lambda_{\mathbf{J}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{J}}|,$$
$$\langle\lambda_{\mathbf{J}}|\lambda_{\mathbf{J}'}\rangle = \delta_{\mathbf{J},\mathbf{J}'}, \quad \mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_{2^n}), \tag{16}$$

где $|\lambda_{\mathbf{J}}\rangle$ и $\lambda_{\mathbf{J}}$ – собственные векторы и числа. Собственные векторы могут быть представлены в виде разложения по базисным обобщенным векторам:

$$|\lambda_{\mathbf{J}}\rangle = \sum_{i_1,\ldots i_n} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty dk_1 \ldots dk_n \times$$
$$\Phi(k_1 i_1, \ldots, k_n i_n; \tau_0)|k_1 i_1, \ldots, k_n i_n\rangle = \tag{17}$$
$$= \sum_{i_1,\ldots i_n} \int_{-\infty}^\infty \ldots \int_{-\infty}^\infty d\tau_1 \ldots d\tau_n \times$$
$$\times\, \Phi(\tau_1 i_1, \ldots \tau_n i_n; \tau_0)|\tau_1 i_1, \ldots \tau_n i_n\rangle.$$

Амплитуда $\Phi(k_1 i_1, \ldots k_n i_n; \tau_0)$ однозначно выражается через одночастичные амплитуды $\varphi(k)$ и их поляризации, и зависит также от временной раздвижки (τ_0) между отдельными пакетами.

Проектор на типичное пространство n-фотонной матрицы плотности

$$\mathrm{Typ} = \{\lambda_{\mathbf{J}} : e^{-(H^{(n)}+\delta)} < \lambda_{\mathbf{J}} < e^{-(H^{(n)}-\delta)}\},$$
$$P^{(n)}_\varepsilon = \sum_{\lambda_{\mathbf{J}}\in\mathrm{Typ}} |\lambda_{\mathbf{J}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{J}}|, \tag{18}$$
$$H^{(n)} = -\sum_{\mathbf{J}} \lambda_{\mathbf{J}} \log \lambda_{\mathbf{J}}$$

– энтропия фон Неймана ансамбля n-фотонных состояний, $P^{(n)}_\varepsilon$) – проектор на типичное подпространство. После усреднения по случайным кодовым словам [3 – 6], средняя ошибка по случайным наборам M кодовых слов длины n не превосходит

$$\overline{P}_e(n, M) \le 2\mathrm{Tr}\{\rho^{(n)}(I - P^{(n)}_\varepsilon)\} +$$
$$+\, \mathrm{Tr}\{\rho^{(n)} P^{(n)}_\varepsilon \rho^{(n)} P^{(n)}_\varepsilon\} \le 2\varepsilon + (M-1)e^{-(H^{(n)}-\delta)}. \tag{19}$$

Ошибка может быть сделана сколь угодно малой, если число кодовых слов $M = e^{nR^{(n)}} < e^{H^{(n)}-\delta}$. Соответственно число бит на одну посылку

$$R^{(n)} < \frac{H^{(n)}}{n} - \delta'. \tag{20}$$

Важен предел $H^{(n)}/n$ при $n \to \infty$. Этот предел всегда меньше, чем $H^{(1)\otimes n}$, поскольку перекрытие отдельных пакетов из-за тождественности частиц уменьшает различимость кодовых слов.

Величина $H^{(n)}/n$ является убывающей функцией n при фиксированной раздвижке τ_0 и форме амплитуды. При $\tau_0 = 0$ $H^{(n)} = 0$, поскольку все состояния из типичного подпространства становятся одинаковыми. Пусть раздвижка одного крайнего пакета на световом конусе равна $\tau_0 = \infty$, в этом случае матрица плотности $\rho^{(n)} = \rho^{(n-1)} \otimes \rho^{(1)}$ и

$$\frac{H^{(n)}}{n} \le \frac{H^{(n-1)}}{n} + \frac{H^{(1)}}{n} \le \frac{H^{(n-1)}}{n-1}. \tag{21}$$

Последовательность $H^{(n)}/n$ убывает и ограничена снизу, поэтому предел существует и равен

$$H_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{H^{(n)}}{n}. \tag{22}$$

Величина H_∞ является пропускной способностью и определяет “скорость” передачи информации как число бит на одну посылку на один фотон, однако не является скоростью в смысле бит/с, поскольку требует доступа ко всей ветви светового конуса.

Обратная теорема кодирования доказывается при помощи неравенства Фано [3, 6] и дает ту же верхнюю оценку для числа кодовых слов (20).

Для выяснения вопроса о пропускной способности как число бит/с необходимо рассматривать измерения в конечном временном окне. Перейдем к этому вопросу.

В предыдущем случае, когда доступна вся ветвь светового конуса по τ (неограниченное время наблюдения), пространством результатов, на котором возникает распределение вероятностей результатов измерений при декодировании, является дискретное пространство, нумеруемое индексом кодовых слов $\boldsymbol{\nu}_j = (\nu_{1j}, \dots , \nu_{nj})$. Принципиальное отличие решающего правила (разбиения единицы) при ограниченном временном окне наблюдения состоит в том, что пространство результатов становится декартовым произведением множеств:

$$\Sigma = [(\tau_1 \in T_n, \nu_{1j}) \bigcup (\tau_1 \in \overline{T}_n, \nu_{1j})] \times \dots \\ \dots [(\tau_n \in T_n, \nu_{nj}) \bigcup (\tau_n \in \overline{T}_n, \nu_{nj})], \qquad (23)$$

где T_n – область светового конуса, доступная для наблюдения (временное окно), и $T_n + \overline{T}_n = (-\infty, \infty)$, далее удобно обозначить $T_n = n \cdot T_0$ (T_0 – эффективное временное окно на одну посылку). При декодировании n-фотонного сообщения результат измерения в каждом из каналов, нумеруемых индексами ν_{kj}, независимо от других значений может иметь место во временном окне, $\tau_k \in T_n$, либо вне его, $\tau_k \in \overline{T}_n$. Такой исход означает, что детектор у наблюдателя во временном окне T_n просто не сработал.

Любой оператор, действующий в n-фотонном подпространстве на поляризационные степени свободы в *ограниченном временном окне*, может быть разложен по обобщенным базисным операторам:

$$X_{\mathbf{jj}'} =$$

$$= \int \dots \int dk_1 \dots dk_n |k_1 j_1, \dots , k_n j_n\rangle\langle k_n j'_n, \dots , k_1 j'_1| =$$

$$= \int_{T_n} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{(2\pi)^n} \left(\int_0^\infty d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\tau}} |\mathbf{kj}\rangle \right) \left(\int_0^\infty d\mathbf{k}' e^{-i\mathbf{k}'\boldsymbol{\tau}} \langle \mathbf{k}'\mathbf{j}'| \right) +$$

$$+ \int_{\overline{T}_n} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{(2\pi)^n} \left(\int_0^\infty d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\tau}} |\mathbf{kj}\rangle \right) \left(\int_0^\infty d\mathbf{k}' e^{-i\mathbf{k}'\boldsymbol{\tau}} \langle \mathbf{k}'\mathbf{j}'| \right), \qquad (24)$$

где для краткости введены обозначения

$$|k_1 j_1, \dots , k_n j_n\rangle = |\mathbf{kj}\rangle, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots k_n),$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots \tau_n), \mathbf{j} = (j_1, \dots j_n),$$

$$d\mathbf{k} = dk_1 \dots dk_n, \quad d\boldsymbol{\tau} = d\tau_1 \dots d\tau_n \quad j_k = \pm.$$

Матрица плотности для отдельного сообщения в базисе обобщенных состояний есть

$$\rho^n_{\boldsymbol{\nu}} = |\varphi_{\boldsymbol{\nu}}\rangle\langle\varphi_{\boldsymbol{\nu}}| = \left(\sum_{l_1,\dots l_n=\pm} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dk_1 \dots dk_n \gamma_{l_1} \dots \gamma_{l_n} \varphi(k_1) \dots \varphi(k_n) e^{ik_n\tau_0(n-1)} |k_1 l_1 \dots k_n l_n\rangle \right) \times \qquad (25)$$

$$\times \left(\sum_{l'_1,\dots l'_n=\pm} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dk'_1 \dots dk'_n \gamma^*_{l'_1} \dots \gamma^*_{l'_n} \varphi^*_{l'_1}(k'_1) \dots \varphi^*_{l'_n}(k'_n) e^{-ik'_n\tau_0(n-1)} \langle k'_n l'_n \dots k'_1 l'_1| \right),$$

где введено обозначение $\gamma_{l_i} = \alpha_i, \quad l_i = +$ и $\gamma_{l_i} = \beta_i. \quad l_i = -$. Соответственно для матрицы плотности для ансамбля сообщений длины n $\rho^{(n)} = \sum_{\boldsymbol{\nu}} P_{\boldsymbol{\nu}} \rho^{(n)}_{\boldsymbol{\nu}}$. Эффективная матрица плотности после взятия частичного следа по пространственно-временным переменным в базисе $|\mathbf{kj}\rangle$

$$\rho^{(n)}_{\boldsymbol{\nu}e} = \sum_{\{\mathbf{i},\mathbf{i}'\}} \sum_{l_1,l'_1\dots l_n,l'_n=\pm} \int_{T_n} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{(2\pi)^n} \gamma_{l_{i_1}} \gamma^*_{l'_{i'_1}} \varphi_{i_1}(\tau_1)\varphi^*_{i'_1}(\tau_1) \dots \gamma_{l_{i_n}} \gamma^*_{l'_{i'_n}} \varphi_{i_n}(\tau_n)\varphi^*_{i'_n}(\tau_n) \delta_{j_1,l_{i_1}} \delta_{l'_{i'_1},j'_1} \dots \delta_{j_n,l_{i_n}} \delta_{l'_{i'_n},j'_n} \bigoplus \qquad (26)$$

$$\bigoplus \sum_{\{\mathbf{i},\mathbf{i}'\}} \sum_{l_1,l'_1\dots l_n,l'_n=\pm} \int_{\overline{T}_n} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{(2\pi)^n} \gamma_{l_{i_1}} \gamma^*_{l'_{i'_1}} \varphi_{i_1}(\tau_1)\varphi^*_{i'_1}(\tau_1) \dots \gamma_{l_{i_n}} \gamma^*_{l'_{i'_n}} \varphi_{i_n}(\tau_n)\varphi^*_{i'_n}(\tau_n) \delta_{?_1,l_{i_1}} \delta_{l'_{i'_1},?_1} \dots \delta_{?_n,l_{i_n}} \delta_{l'_{i'_n},?_n},$$

где $j_k, j'_k, ?_k = \pm$, и аналогично для полной матрицы плотности. Знак прямой суммы отражает тот факт, что второе слагаемое ортогонально первому. Во втором слагаемом достаточно оставить только диагональные члены (аналогично тому, что обсуждалось выше), и сделана формальная замена $j_k, j'_k \to ?_k$. Повторяя предыдущие аргументы, можно получить, что число кодовых слов (см. детали в [3–6])

$$R^{(n)} < H(\mathcal{T}[\rho^{(n)}]) - \sum_{\nu} P_{\nu} H(\mathcal{T}[\rho_{\nu}^{(n)}]) - \delta = H(\rho_e^{(n)}) - \sum_{\nu} P_{\nu} H(\rho_{\nu e}^{(n)}) - \delta. \quad (27)$$

Обратная теорема кодирования может быть доказана аналогично [3,6] при помощи квантового аналога неравенства Фано. Соответственно, пропускная способность есть

$$C(T_0) = \max_{\{\pi_0,\pi_1\}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{H(\rho_e^{(n)}) - \sum_{\nu} P_{\nu} H(\rho_{\nu e}^{(n)})}{nT_0} \right) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{photon} \cdot \text{s}}\right]. \quad (28)$$

Таким образом, нелокализуемость состояний в квантовой теории поля приводит к тому, что отдельные посылки не могут быть описаны как независимые из-за неизбежности их перекрытия, что требует учета тождественности частиц. Данное обстоятельство, вместе с конечной предельной скоростью, приводит к тому, что формулы для пропускной способности нерелятивистских каналов связи имеют асимптотический характер (справедливы формально лишь при бесконечной раздвижке между посылками, когда тождественностью частиц можно пренебречь). Скорость передачи во времени (бит/с·посылка) при этом стремится к нулю. Формула (28) дает величину пропускной способности для релятивистского квантового канала в реальном времени.

Выражаю благодарность С.С.Назину за полезные обсуждения и критические замечания. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект # 02-02-16289), а также проектами # 40.020.1.1.1170 и # 37.029.1.1.0031.

1. C. E. Shannon, Bell Syst. Tech. Jour. **27**, 397; 623 (1948).
2. Р. Галлагер, *Теория информации и надежная связь*, М.: Советское радио, 1974).
3. А. С. Холево, Проблемы передачи информации **8**, 63 (1972); **15**, 3 (1979); Успехи мат. наук. **53**, 193 (1998).
4. R. Jozsa and B. Schumacher, J. Mod. Optics. **41**, 2343 (1994).
5. P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher et al., Phys. Rev. **A54**, 1869 (1996).
6. B. Schumacher and M. D. Westmoreland, Phys. Rev. **A56**, 131 (1997).
7. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, sl Введение в теорию квантованных полей, М.: Наука, 1973.
8. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля*, М.: Наука, 1969.
9. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, М.: Наука, 1987.
10. Д. А. Киржниц, УФН **90**, 129 (1966).
11. I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. Lett. **80**, 5247 (1998).
12. A. M. Jaffe, Phys. Rev. **158**, 1454 (1967).
13. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции, вып.4)*, М.: Физматгиз, 1961.
14. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, М.: Наука, 1964 [N.Wiener and R.Paley, *Fourier Transform in the Complex Domain*, New-York, 1934].