

Операциональное условие ортогональности одномодовых бифотонов–кутритов

А. А. Жуков, Г. А. Масленников¹⁾, М. В. Чехова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 октября 2002 г.

Рассматривается произвольное поляризационное состояние одномодовых бифотонов. Сформулирован операциональный критерий ортогональности для таких состояний, который позволяет экспериментально выделять бифотон с произвольной степенью поляризации из множества ему ортогональных. Такая возможность необходима для реализации протокола квантовой криптографии на основе трехуровневых систем. Экспериментальная проверка такого критерия сводится к наблюдению эффекта антикорреляции для произвольного поляризационного состояния бифотона.

PACS: 03.67.Hk, 42.25.Ja, 42.50.Dv

В последнее время в теории квантовой информации большой интерес вызывают многоуровневые системы размерности большей двух, которые по сравнению с традиционными двухуровневыми системами предоставляют возможность более плотной записи информации. Это, в частности, важно для такой области, как квантовая криптография, так как позволяет увеличить скорость обмена данными [1] и повысить безопасность в случае определенного класса подслушивающих атак [2]. Однако при переходе к системам с большей размерностью неизбежно возникают экспериментальные трудности как при реализации, так и в процессе адекватного измерения параметров. С решением этих проблем связывается создание устройств вывода информации, протоколов коррекции ошибок, повторителей и других квантовых коммуникационных устройств. Наиболее простой системой после двухуровневой является трехуровневая, состояние которой в квантовой информации носит название “кутрит” по аналогии с кубитом. Волновая функция произвольной трехуровневой системы имеет вид

$$\Psi = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle, \quad (1)$$

где $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ – ортогональные базисные состояния. Комплексные коэффициенты c_i называются амплитудами базисных состояний $|i\rangle$ и связаны условием нормировки

$$\sum_{i=1}^3 |c_i|^2 = 1. \quad (2)$$

На настоящий момент использование кутритов в квантовой информации уже не является чем-то

экзотическим. Например, авторами [3] предложен протокол квантовой криптографии, использующий трехуровневые системы, а интерферометрическая методика приготовления многоуровневых систем рассмотрена в [1]. Теоретическое рассмотрение процедуры восстановления состояния любой многоуровневой системы по измеренным величинам можно найти в [4].

Бифотонные поля использовались во многих экспериментах квантовой оптики практически с самого момента ее появления. Такие поля представляют собой поток пар сильно коррелированных по месту и времени рождения фотонов. В подавляющем числе экспериментов в качестве источника бифотонного поля используется спонтанное параметрическое рассеяние света (СПР). Как будет показано ниже, в том случае, когда пара фотонов излучается в одну пространственную и частотную моду, поляризационные характеристики такого состояния позволяют рассматривать бифотон как кутрит [5]. Использование одномодовых бифотонов как кутритов в квантовых коммуникационных протоколах, например, в квантовой криптографии, приводит к задаче о выделении какого-либо бифотона из подмножества ему ортогональных по поляризации. В данной работе формулируется операциональное условие ортогональности бифотонов для произвольной степени поляризации и предлагается экспериментальная схема, позволяющая однозначно выделять одно поляризационное состояние бифотона из множества ему ортогональных. Эта задача носит фундаментальный характер, и ее решение найдет применение, например, в практической реализации протокола квантовой криптографии для трехуровневых систем.

¹⁾e-mail: postmast@qopt.phys.msu.su

Бифотоны как кутриты. Возможность использования поляризационных состояний одномодовых бифотонов для записи информации была предложена в [5], а поляризационные характеристики таких полей рассмотрены в [6, 7]. Чистое поляризационное состояние бифотона в случае коллинеарного, частотно-вырожденного режима запишется в виде [5]

$$|\Psi\rangle = c_1|2, 0\rangle + c_2|1, 1\rangle + c_3|0, 2\rangle. \quad (3)$$

Здесь запись $|n, m\rangle$ означает состояние с n фотонами в горизонтальной поляризационной моде (H) и m фотонами в вертикальной моде (V) ($n + m = 2$); $c_i = |c_i| \exp(i\phi_i)$ – комплексные амплитуды вероятности найти бифотон в соответствующем состоянии. Состояния $|2, 0\rangle$, $|1, 1\rangle$ и $|0, 2\rangle$ – это ортогональные базисные состояния в так называемом HV представлении. По аналогии с (1), такое состояние может быть использовано для троичной кодировки информации. Для визуального изображения поляризационных состояний бифотонного света удобно использовать метод сферы Пуанкаре [7]. Можно показать, что вектор состояния (3) представим в виде

$$|\Psi\rangle = \frac{a^\dagger(\vartheta, \varphi)a^\dagger(\vartheta', \varphi')|vac\rangle}{\|a^\dagger(\vartheta, \varphi)a^\dagger(\vartheta', \varphi')|vac\rangle\|}, \quad (3a)$$

где $a^\dagger(\vartheta, \varphi)$ и $a^\dagger(\vartheta', \varphi')$ – операторы рождения фотонов в произвольных поляризационных модах, например,

$$a^\dagger(\vartheta, \varphi) = \cos \frac{\vartheta}{2} a^\dagger_H + e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} a^\dagger_V,$$

$a^\dagger_{H,V}$ – операторы рождения фотонов в линейных поляризационных модах H, V , $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi]$ и $\vartheta, \vartheta' \in [0, \pi]$ – соответственно, азимутальный и полярный углы на сфере Пуанкаре. В этом случае

$$\begin{aligned} \varphi, \varphi' &= \frac{\varphi_3}{2} \pm \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{|c_2|^2}{2|c_1||c_3|} - \right. \\ &\left. - \sqrt{1 + \frac{|c_2|^4}{4|c_1|^2|c_3|^2} - \frac{|c_2|^2}{|c_1||c_3|} \cos(2\varphi_2 - \varphi_3)} \right], \\ \theta, \theta' &= \arccos \left\{ \left[|c_1|^2 - |c_3|^2 \pm \right. \right. \\ &\left. \left. \pm 2\sqrt{[|c_2|^2 - |c_1||c_3| \cos(2\varphi - \varphi_3)]^2 - |c_1|^2|c_3|^2} \right] \times \right. \\ &\left. \times [1 + |c_2|^2 - 2|c_1||c_3| \cos(2\varphi - \varphi_3)]^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

здесь нештрихованные величины относятся к первому, а штрихованные – ко второму фотонам из пары. Удобно для дальнейшего рассмотрения также ввести

степень поляризации бифотона. Эта величина, вычисленная в [6], при переходе к новому представлению имеет вид

$$P = \frac{2 \cos(\alpha/2)}{1 + \cos^2(\alpha/2)},$$

где α – угол, под которым пара точек, изображающая бифотон, видна из центра сферы.

Приготовление бифотонного поля в произвольном поляризационном состоянии с любыми заданными коэффициентами c_i может быть осуществлено в трехплечевом интерферометре типа Маха–Цандера с тремя нелинейными кристаллами. Каждый из них дает одно из базисных состояний в отдельном плече, а на выходе образуется линейная суперпозиция вида (3), причем как амплитуды, так и фазы комплексных коэффициентов c_i могут изменяться заданным образом в каждом из плеч (рис.1). В частности, в интерферометре подобного типа могут быть приго-

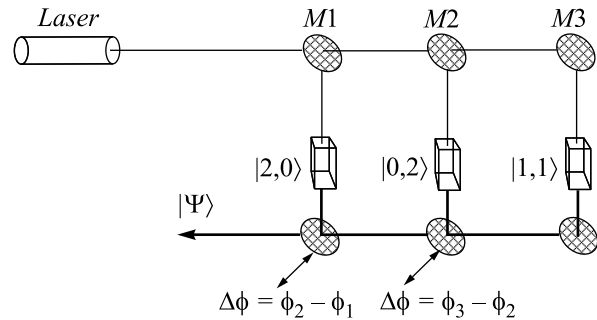


Рис.1. Схема трехплечевого нелинейного интерферометра Маха-Цандера. В каждом из плеч расположен нелинейный кристалл, ориентированный для генерации соответствующего состояния. Внося разность фаз между состояниями с помощью зеркал, можно заданным образом менять фазы в коэффициентах c_i , а меняя мощность накачки, можно заданным образом изменять их амплитуды. $M1, M2, M3$ – зеркала

товлены все состояния, которые используются в протоколе квантовой криптографии, предложенном в [3].

Для адекватного измерения поляризационных характеристик одномодовых бифотонных полей используется схема Брауна–Твисса с произвольными поляризационными фильтрами в плечах (рис.2). Каждый фильтр включает в себя поляризационный преобразователь и линейный поляризационный анализатор; в результате таким фильтром выделяется определенное поляризационное состояние. При измерении в такой схеме определенного набора моментов четвертого порядка по полю можно определить действительные и мнимые части коэффициентов c_i ,

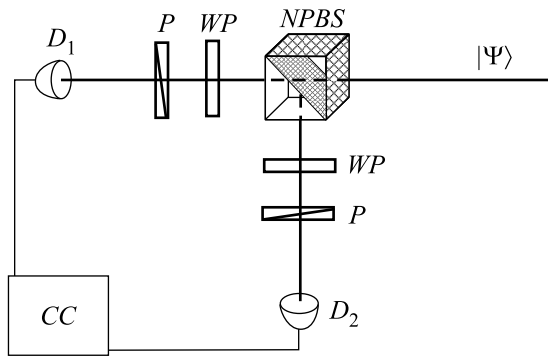


Рис. 2. Схема для измерения произвольного поляризованного состояния бифотонного поля: *NPBS* – неполяризованный светоделитель, *WP* – набор волновых пластинок, *P* – анализатор, *D* – детекторы одиночных фотонов, *CC* – схема совпадений фотоотсчетов

варьируя характеристики преобразователей. Для некоторых чистых состояний $|\Psi\rangle$ это было предпринято в [8]. Однако в подобной схеме может быть измерено любое произвольное поляризованное состояние бифотонного поля, задаваемое *HV*-базисом. Будем говорить, что измерительная схема “настроена” на конкретное поляризованное состояние бифотона (3а), если в одном из каналов выделяется поляризованное состояние с параметрами (ϑ, φ) , а в другом – состояние с параметрами (ϑ', φ') .

Ортогональность одномодовых бифотонов.

Предположим, что в установке, изображенной на рис.2, в каналах 1 и 2 выделяются поляризованные состояния, соответствующие модам a_1 и b_2 (буква здесь обозначает поляризованные состояния, а индекс нумерует пространственные моды). Запишем условие ортогональности некоторого состояния, подаваемого на вход, $|\Psi_{cd}\rangle$, и состояния $|\Psi_{ab}\rangle$, на детектирование которого настроена установка, причем

$$|\Psi_{ab}\rangle = \frac{a^\dagger b^\dagger |\text{vac}\rangle}{\|a^\dagger b^\dagger |\text{vac}\rangle\|}, \quad |\Psi_{cd}\rangle = \frac{c^\dagger d^\dagger |\text{vac}\rangle}{\|c^\dagger d^\dagger |\text{vac}\rangle\|}.$$

Здесь $a^\dagger, b^\dagger, c^\dagger, d^\dagger$ – операторы рождения в поляризованных модах a, b, c, d . Подчеркнем, что в общем случае моды a, b, c, d не ортогональны. Условие ортогональности подаваемого на вход бифотона и того бифотона, на детектирование которого настроена установка, имеет вид

$$\langle \Psi_{ab} | \Psi_{cd} \rangle = 0$$

или, что то же самое,

$$\langle \text{vac} | abc^\dagger d^\dagger | \text{vac} \rangle = 0. \quad (4)$$

Так как операторы рождения и уничтожения до и после 50% светоделителя однозначно связаны соот-

ношениями вида $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + ia_2^\dagger)$, то (4) можно переписать как

$$\langle \text{vac} | (a_1 - ia_2)(b_1 - ib_2)(c_1^\dagger + ic_2^\dagger)(d_1^\dagger + id_2^\dagger) | \text{vac} \rangle = 0. \quad (5)$$

Отбрасывая члены вида $\langle \text{vac} | a_i b_j c_i^\dagger d_j^\dagger | \text{vac} \rangle$, обращаемые в нуль в силу (4), и члены вида $\langle \text{vac} | a_i b_j c_j^\dagger d_i^\dagger | \text{vac} \rangle$, также равные нулю, так как они соответствуют рождению пары фотонов в моде j и уничтожению пары фотонов в моде i , и т.д., получим

$$\langle \text{vac} | a_1 b_2 (c_1^\dagger d_2^\dagger + c_2^\dagger d_1^\dagger) + a_2 b_1 (c_1^\dagger d_2^\dagger + c_2^\dagger d_1^\dagger) | \text{vac} \rangle = 0. \quad (6)$$

Здесь отметим, что

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | a_1 b_2 (c_1^\dagger d_2^\dagger + c_2^\dagger d_1^\dagger) | \text{vac} \rangle &= \\ &= \langle a_1 c_1^\dagger | \langle b_2 d_2^\dagger \rangle + \langle a_1 d_1^\dagger | \langle b_2 c_2^\dagger \rangle = \\ &= \langle ac^\dagger | \langle bd^\dagger \rangle + \langle ad^\dagger | \langle bc^\dagger \rangle, \\ \langle \text{vac} | a_2 b_1 (c_1^\dagger d_2^\dagger + c_2^\dagger d_1^\dagger) | \text{vac} \rangle &= \\ &= \langle a_2 c_2^\dagger | \langle b_1 d_1^\dagger \rangle + \langle a_2 d_2^\dagger | \langle b_1 c_1^\dagger \rangle = \\ &= \langle ac^\dagger | \langle bd^\dagger \rangle + \langle ad^\dagger | \langle bc^\dagger \rangle, \end{aligned}$$

то есть средние от обоих слагаемых в (6) равны, так как отличаются только индексами пространственных мод, и, следовательно,

$$\langle \text{vac} | a_1 b_2 (c_1^\dagger d_2^\dagger + c_2^\dagger d_1^\dagger) | \text{vac} \rangle = 0. \quad (7)$$

Заметим, что входящие в (7) векторы состояния вида $a_i b_j c_i^\dagger d_j^\dagger | \text{vac} \rangle$ содержат два оператора рождения и два оператора уничтожения; поэтому их сумма представляет собой вакуумное состояние, умноженное на некоторое число. В силу (7) это число – нуль. Таким образом, получаем окончательное выражение условия ортогональности бифотонов $|\Psi_{ab}\rangle$ и $|\Psi_{cd}\rangle$:

$$a_1 b_2 (c_1^\dagger d_2^\dagger + c_2^\dagger d_1^\dagger) | \text{vac} \rangle = 0. \quad (8)$$

Подаваемое на вход состояние $|\Psi_{cd}\rangle$ после светоделителя принимает вид

$$|\Psi'_{cd}\rangle = \frac{i}{2\|c^+ d^+ | \text{vac} \rangle\|} \{c_1^\dagger d_2^\dagger + d_1^\dagger c_2^\dagger + c_1^\dagger d_1^\dagger + c_2^\dagger d_2^\dagger\} | \text{vac} \rangle.$$

Последние два слагаемых не вносят вклад в совпадения, так как соответствуют тому, что оба фотона пары направляются в один фотодетектор. Поэтому скорость счета совпадений определяется корреляционной функцией второго порядка

$$G^{(2)} = \frac{1}{4\|c^+ d^+ | \text{vac} \rangle\|^2} \times$$

$$\langle \text{vac} | \{c_1 d_2 + d_1 c_2\} a_1^\dagger b_2^\dagger a_1 b_2 \{c_1^\dagger d_2^\dagger - d_1^\dagger c_2^\dagger\} | \text{vac} \rangle. \quad (9)$$

Экспериментальная зависимость скорости счета совпадений от состояния поляризации бифотона на входе установки и того состояния, на которое настроена установка

Состояние на входе	Степень поляризации P	Регистрируемое состояние	Степень поляризации P	Скорость счета совпадений (c^{-1})
$ H, V\rangle$	0	$ H, V\rangle$	0	4.0 ± 0.4
$ R, L\rangle$	0	$ H, V\rangle$	0	0.5 ± 0.25
$ D, \bar{D}\rangle$	0	$ H, V\rangle$	0	0.25 ± 0.1
$ H, V\rangle$	0	$ D, \bar{D}\rangle$	0	0.25 ± 0.1
$ D, \bar{D}\rangle$	0	$ D, \bar{D}\rangle$	0	3.8 ± 0.4
$ H, V\rangle$	0	$ H, H\rangle$	1	0.15 ± 0.05
$ D, \bar{D}\rangle$	0	$ H, H\rangle$	1	1.9 ± 0.2

Примечание. Приняты следующие обозначения для поляризационных мод: H – горизонтальное направление поляризации в моде, V – вертикальное направление поляризации в моде, D, \bar{D} – линейная поляризация, направленная под $+45^\circ$ и -45° к вертикальному направлению, R, L – соответственно правая и левая циркулярные поляризации.

Отсутствие совпадений фотоотчетов детекторов D_1, D_2 равносильно обращению в нуль коррелятора, входящего в (9). Условие отсутствия совпадений можно записать как

$$\langle \text{vac} | \{c_1 d_2 + d_1 c_2\} a_1^\dagger b_2^\dagger a_1 b_2 \{c_1^\dagger d_2^\dagger + d_1^\dagger c_2^\dagger\} | \text{vac} \rangle = 0, \quad (10)$$

что равносильно условию (8).

Таким образом, условие ортогональности двух бифотонов тождественно условию отсутствия совпадений в схеме на рис.2, если один из бифотонов подается на вход, а установка “настроена” на второй бифотон. Эта процедура может рассматриваться как проецирование одного поляризационного состояния на другое, а в роли наблюдаемой величины выступает число совпадений фотоотчетов. В том случае, если другое состояние окажется ортогональным исходному, то скорость счета совпадений должна упасть до уровня случайных совпадений. Следует отметить также, что скорость одиночных фотоотчетов обоих детекторов в общем случае будет отлична от нуля при изменении характеристик поляризационных преобразователей, например, при вращении анализатора. При этом характер изменения числа одиночных фотоотчетов будет иметь вид интерференционной картины с видностью, равной степени поляризации измеряемого бифотона [9].

В таблице приведены экспериментальные данные [5], иллюстрирующие критерий ортогональности бифотонов. Например, если регистрирующая схема “настроена” на состояние $|H, V\rangle$, а на вход подается ортогональное ему состояние $|R, L\rangle$ (пара фотонов, поляризованных право- и левоциркулярно) или $|D, \bar{D}\rangle$ (пара фотонов, поляризованных линейно под углами $\pm 45^\circ$), наблюдается скорость счета совпадений на порядок ниже, чем при наличии на входе в систему того же состояния $|H, V\rangle$. Такая же низкая скорость сче-

та совпадений наблюдается в случае, когда на вход подается состояние $|H, V\rangle$, а установка “настроена” на ортогональное ему состояние $|H, H\rangle$. В то же время, если установка “настроена” на состояние $|H, H\rangle$, а на входе – состояние $|D, \bar{D}\rangle$, проекция которого на $|H, H\rangle$ равна $1/\sqrt{2}$, скорость счета совпадений вдвое ниже, чем в случае, когда установка “настроена” на входное состояние.

Таким образом, предложенный критерий ортогональности бифотонов позволяет однозначно выделять бифотон с произвольным состоянием поляризации из множества ему ортогональных. Экспериментальная проверка такого критерия сводится к наблюдению эффекта антикорреляции [10, 11] для произвольного поляризационного состояния бифотона, в отличие от работ [10, 11], где направления поляризации фотонов в паре совпадали, или работы [12], где они были ортогональными.

Практическим приложением данного критерия является возможность реализации на его основе протокола квантовой криптографии [3]. Именно возможность однозначного выделения нужного поляризационного состояния бифотона из множества ортогональных ему позволяет достоверно приписывать ему определенное логическое значение, используемое в секретном ключе. Тем не менее, данная схема не свободна от потерь. Так, например, оба фотона из пары могут отправиться в одно плечо схемы после светоделителя, не давая, таким образом, вклада в совпадения. Одно это обстоятельство вдвое уменьшает количество полезной информации. Другим источником потерь является то, что хотя предложенная схема и фильтрует единственный бифотон $|\Psi_{cd}\rangle = c^\dagger d^\dagger |\text{vac}\rangle / \|c^\dagger d^\dagger |\text{vac}\rangle\|$ из множества ортогональных, существует определенная вероятность того, что этот бифотон не даст совпадения на выходе схе-

мы даже при использовании идеальных детекторов. Это может произойти тогда, когда фотон в моде c направится в плечо, “настроенное” на моду d , и наоборот. Ясно, что так как моды c и d в общем случае не совпадают, то детектирование каждого фотона по отдельности может и не произойти, и, как следствие этого, не будет и совпадения.

Авторы выражают благодарность С. П. Кулику и П. А. Прудковскому за многочисленные и плодотворные обсуждения. Данная работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований # 02-02-16664 и # 00-15-96541, а также программы INTAS # 01-2122.

-
1. H. Bechmann-Pasquinnucci and W. Tittel, *Phys. Rev.* **A61**, 062308 (2000).
 2. D. Bruss and C. Machiavello, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 127901 (2002).
 3. H. Bechmann-Pasquinnucci and A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3313 (2002).
 4. R. T. Thew, K. Nemoto, A. G. White, and W. J. Munro, *Phys. Rev.* **A66**, 012303 (2002).
 5. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, O. A. Karabutova et al., *Phys. Rev.* **A60**, 4209 (1999).
 6. А. В. Бурлаков, Д. Н. Клышко, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 795 (1999).
 7. А. В. Бурлаков, М. В. Чехова, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 505 (2002).
 8. A. V. Burlakov, L. A. Krivitskiy, S. P. Kulik et al., e-print quant-ph/0207096 v2, 17 Sep. (2002).
 9. Д. Н. Клышко, *ЖЭТФ* **111**, 1955 (1997).
 10. C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987),
 11. Y. H. Shih and C. O. Alley, , *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2921 (1988).
 12. Y. H. Shih and A. V. Sergienko, *Phys. Lett.* **A186**, 29 (1994).