Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 10, с. 701 – 704 © 2002 г. 25 ноября

К теории рентгеновской преломляющей оптики. Точное решение для параболической среды

В. Г. Кон[1)2)]

Российский научный центр "Курчатовский Институт", 123182 Москва, Россия

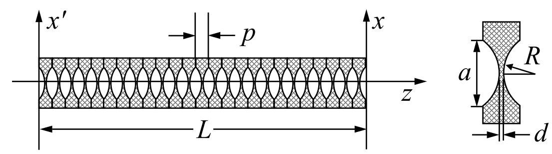
Поступила в редакцию 24 октября 2002 г.

Получено точное решение для пропагатора, описывающего распространение рентгеновских лучей через преломляющую параболическую среду. Такая среда возникает в составных преломляющих рентгеновских линзах с большим числом элементов, которые используются на источниках синхротронного излучения. Полученное решение позволяет детально проанализировать свойства таких линз и предсказать особенности их работы в конкретных приложениях (фокусировка пучков, изображение микрообъектов, фурье-преобразование).

PACS: 07.85.Qe, 41.50.+h, 42.30.–d

В течение 100 лет после открытия рентгеновского излучения существовало убеждение о невозможности использования преломляющих линз для фокусировки жестких рентгеновских пучков по двум причинам. Во-первых, коэффициент преломления для электромагнитного излучения с энергией E в интервале 10–50 кэВ очень слабо отличается от единицы. Во-вторых, такое излучение всегда имеет отличный от нуля коэффициент поглощения. Если записать комплексный коэффициент преломления в виде $n = 1 - \delta + i\beta$, то, например, для алюминия и $E = 25$ кэВ имеем $\delta = 8.643 \cdot 10^{-7}$, $\beta = 1.747 \cdot 10^{-9}$.

Проблема была решена в 1996 г. [1] с помощью использования составных линз, то есть состоящих из большого числа относительно тонких элементов. Весьма удачным обстоятельством оказалось то, что фазовая скорость рентгеновских лучей в веществе больше скорости света в вакууме, поэтому фокусирующая линза является двояко-вогнутой и толщина материала в центральной части линзы мала по сравнению с длиной поглощения. В настоящее время опубликовано много работ, в которых развиваются различные методы изготовления составных преломляющих линз для рентгеновских лучей. Наиболее интересными представляются составные линзы с круглой апертурой и параболическим профилем. Элементы таких линз получают выдавливанием параболического профиля в пластинках из алюминия (см., например, [2]) или органических материалов (см., например, [3]). Каждый элемент фокусирует параллельный пучок в точку на расстоянии $F_1 = R/2\delta$, где R – радиус кривизны параболического профиля (см. рисунок). При этом блок из N элементов будет иметь фокусное расстояние $F \approx F_1/N$. Пусть, например, $F_1 = 100$ м. Используя блок из 100 элементов, получим фокусное расстояние, равное 1 м, что вполне приемлемо для проведения экспериментов на станциях синхротронного излучения.



Составная преломляющая рентгеновская линза (слева) и параметры отдельного элемента линзы (справа)

Относительно легко можно изготовить линзу, имеющую 1000 элементов и более. При этом длина составной линзы $L = Np$ увеличивается с ростом числа элементов N, а фокусное расстояние F уменьшается. Очевидно, что пока $L \ll F$, фокусное расстояние можно оценивать по формуле тонкой линзы: $F \approx R/2N\delta$. Однако и в этом случае линейные поправки по малому параметру L/F могут быть весьма существенными при изображении микрообъектов с предельным разрешением. Теоретический анализ работы составной линзы при длине L, сравнимой с фокусным расстоянием F, проводился только в приближении геометрической оптики (см., например, [4]), что явно недостаточно как для оценки размеров фокусного пятна, так и для анализа переноса изображения с помощью такой линзы.

Полное решение задачи о переносе излучения через длинную составную линзу должно иметь вид интегрального соотношения типа интеграла Кирхгофа. При этом задача сводится к нахождению ядра ин-

[1)] e-mail: kohn@kurm.polyn.kiae.su
[2)] V. G. Kohn.

тегрального преобразования (пропагатора), являющегося решением уравнения Максвелла с начальным условием в виде дельта-функции Дирака. В данной работе показано, что эта задача при определенных условиях имеет точное решение, то есть пропагатор может быть вычислен аналитически в форме, близкой к функции Гаусса с комплексными параметрами, для которых можно написать точные рекуррентные формулы. Предполагается, что синхротронное излучение (СИ) предварительно монохроматизировано и имеет достаточно высокую степень пространственной когерентности. Такие условия выполнены, например, на источниках СИ третьего поколения [5].

Выберем оптическую ось вдоль оси z (см. рисунок) и представим общее решение уравнения Максвелла в виде $E(x,y,z) = \exp(ikz)A_t(x,y,z)$, где $k = \omega/c$ – волновое число в вакууме. Функция $A_t(x,y,z)$ описывает перенос поперечной зависимости волнового поля вдоль оси z. Так как излучение жесткое и слабо взаимодействует с веществом, можно с большой точностью использовать параксиальное приближение, то есть пренебречь второй производной от A_t по координате z по сравнению с первой производной. В результате для функции $A_t(x,y,z)$ имеем параболическое уравнение

$$\frac{dA_t}{dz} = -ik\eta s(x,y,z)A_t + \frac{i}{2k}\left(\frac{d^2A_t}{dx^2} + \frac{d^2A_t}{dy^2}\right), \quad (1)$$

где $\eta = 1 - n = \delta - i\beta = \delta(1 - i\gamma)$. В задаче о переносе излучения считается заданным волновое поле на входной поверхности линзы $A_t(x,y,0) = A_0(x,y)$, координата z отсчитывается от начала линзы. Внутри составной линзы функция $s(x,y,z)$ равна 1 в тех областях, где материал присутствует, и равна 0 в пустотах (см. рисунок).

Ниже ограничимся случаем, когда толщина p одного элемента составной линзы мала по сравнению с характерной длиной, на которой изменяется поперечная зависимость волнового поля. Другими словами, для одного элемента выполняется приближение тонкой линзы. Это всегда имеет место для составной линзы с большим числом элементов. Указанное ограничение позволяет нам усреднить функцию $s(x,y,z)$ по размеру ее периода и заменить ее на функцию, зависящую только от поперечных координат:

$$\overline{s}(x,y) = \frac{d}{p} + \frac{x^2}{pR} + \frac{y^2}{pR}. \quad (2)$$

Такая зависимость имеет место только внутри геометрической апертуры линзы с диаметром $a = 2[R(p-d)]^{1/2}$ (см. рисунок). Однако эффективная рабочая область линзы (эффективная апертура) определяется поглощением рентгеновских лучей в материале линзы и почти всегда меньше геометрической апертуры. Поэтому формально можно считать, что зависимость (2) имеет место во всей интересующей нас области поперечной плоскости (X,Y).

Разложим начальное волновое поле в интеграл Фурье:

$$A_0(x,y) = \int \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2}\exp(iq_x x + iq_y y)\widetilde{A}_0(q_x,q_y) \quad (3)$$

и рассмотрим решение $\widetilde{P}_t(x,y,q_x,q_y,z)$ с начальной функцией в виде плоской волны $\widetilde{P}_t(x,y,q_x,q_y,0) = \exp(iq_x x + iq_y y)$. Решение можно представить в виде произведения $\widetilde{P}_t = \exp(-ik\eta[d/p]z)\widetilde{P}(x,q_x,z)\widetilde{P}(y,q_y,z)$, причем парциальная функция $\widetilde{P}(x,q,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\widetilde{P}}{dz} = -i\frac{k\eta}{pR}x^2\widetilde{P} + \frac{i}{2k}\frac{d^2\widetilde{P}}{dx^2}, \quad \widetilde{P}(x,q,0) = \exp(iqx). \quad (4)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением Шредингера для частицы в параболическом потенциале. Однако нас здесь не интересует разложение по стационарным состояниям.

Принимая во внимание характер начальной функции, будем искать решение в виде функции Гаусса с комплексными коэффициентами:

$$\widetilde{P}(x,q,z) = \exp(ia_0(z) + ia_1(z)x + ia_2(z)x^2), \qquad a_0(0) = a_2(0) = 0, \quad a_1(0) = q. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_0}{dz} = \frac{i}{k}a_2 - \frac{1}{2k}a_1^2, \qquad \frac{da_1}{dz} = -\frac{2}{k}a_1 a_2, \quad \frac{da_2}{dz} = -\frac{k\eta}{pR} - \frac{2}{k}a_2^2. \quad (6)$$

Эта система имеет аналитическое решение при любых начальных условиях, которое может быть записано в виде

$$a_2(z) = a_2(0)\frac{\mathrm{tg}(\alpha - z/z_c)}{\mathrm{tg}(\alpha)}, \qquad a_1(z) = a_1(0)\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha - z/z_c)},$$
$$a_0(z) = a_0(0) - \frac{i}{2}\ln\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha - z/z_c)}\right) - \frac{a_1^2(0)\, z_c \mathrm{tg}(z/z_c)}{2k[1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}(z/z_c)]}, \quad (7)$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{z_c}{z_0}, \quad z_0 = \frac{k}{2a_2(0)}, \quad z_c = \left(\frac{pR}{2\eta}\right)^{1/2}.$$

Правильность решения можно проверить прямой подстановкой. С учетом начальных условий (5) и рекуррентных соотношений (7) для функции $\widetilde{P}(x,q,z)$ получаем выражение

$$\widetilde{P}(x,q,z)=\exp\left(-i\frac{kt_z}{2z_c}x^2\right)c_z^{-1/2}\exp\left(i\frac{x}{c_z}q-i\frac{z_c t_z}{2k}q^2\right). \quad (8)$$

Здесь и далее используются обозначения $s_z = \sin(z/z_c)$, $c_z = \cos(z/z_c)$, $t_z = \mathrm{tg}(z/z_c)$.

Представим общее решение задачи (для любой начальной функции) в виде интеграла

$$A_t(x,y,z) = \int \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2}\widetilde{P}_t(x,y,q_x,q_y,z)\widetilde{A}_0(q_x,q_y). \quad (9)$$

Подставляя сюда выражение для $\widetilde{A}_0(q_x,q_y)$ в виде обратного преобразования Фурье и выполняя интегрирование по q_x, q_y, получаем искомое интегральное преобразование для составной рентгеновской линзы с параболическим профилем

$$A_t(x,y,z) = \int dx'dy' P_t(x,y,x',y',z)A_t(x',y',0), \quad (10)$$

пропагатор которого факторизуется:

$$P_t(x,y,x',y',z)=\exp(-ik\eta[d/p]z)P(x,x',z)P(y,y',z), \quad (11)$$

и парциальный пропагатор определяется выражением

$$P(x,x',z) = \\ = \exp\left(-i\frac{\pi t_z}{\lambda z_c}x^2\right)\frac{1}{(i\lambda z_c s_z)^{1/2}}\exp\left(i\pi\frac{(x-x'c_z)^2}{\lambda z_c s_z c_z}\right). \quad (12)$$

Здесь $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны рентгеновского излучения.

Полученное выражение является главным результатом настоящей работы. Легко непосредственно проверить, что эта функция равна дельта-функции Дирака $\delta(x-x')$ при $z=0$. Очевидно, в пределе $|\eta| \to 0$ интеграл (10) должен перейти в интеграл Кирхгофа. Действительно, выполняя в (12) предельный переход $|z_c| \to \infty$, получаем выражение для поперечной части сферической волны в параксиальном приближении:

$$P(x,x',z) \underset{|\eta|\to 0}{\to} P_K(x-x',z) = \\ = \frac{1}{(i\lambda z)^{1/2}}\exp\left(i\pi\frac{(x-x')^2}{\lambda z}\right). \quad (13)$$

Выражение для пропагатора более сложной задачи о переносе излучения по воздуху на расстояние r_o перед линзой, через линзу длиной L и по воздуху на расстояние r_i после линзы можно записать в виде свертки

$$G(x,x',r_o,L,r_i) = \quad (14)$$
$$= \int dx_2 dx_1\, P_K(x-x_2,r_i)P(x_2,x_1,L)P_K(x_1-x',r_o).$$

Заметим, что интегралы в (14) вычисляются аналитически и приводят к аналитическому выражению для пропагатора G. Однако тот же ответ проще получить методом, развитым выше, а именно, используя три раза рекуррентные соотношения (7), причем для воздуха необходимо использовать их предельный переход при $|\eta| \to 0$. Метод рекуррентных соотношений (7) особенно удобен для разработки алгоритма компьютерного симулирования формирования изображений с помощью линзы. Такая компьютерная программа нами разработана, однако анализ конкретных результатов выходит за рамки данного краткого сообщения. Более того, этот метод может быть использован также для системы линз с различными параметрами.

Ниже рассмотрим главные особенности работы составной преломляющей линзы, следующие из формулы (12). С учетом неравенства $\gamma = \beta/\delta \ll 1$ комплексный параметр z_c можно записать в виде $z_c = (pF_1)^{1/2}(1+i\gamma/2)$. В области $L \ll (pF_1)^{1/2}$, ограничиваясь первыми членами разложения синуса и косинуса, получаем выражение для пропагатора в пределе тонкой линзы:

$$P_0(x,x',L) = \exp\left(-i\pi\frac{x^2}{\lambda F}[1-i\gamma]\right)P_K(x-x',L),$$

$$F = \frac{F_1}{N} = \frac{R}{2N\delta}. \quad (15)$$

Заметим, что указанную выше область применимости приближения можно записать как $L \ll F$. Поглощение рентгеновских лучей приводит к тому, что плоская волна при прохождении через линзу приобретает гауссову форму, в которой распределение интенсивности имеет ширину на половине высоты, равную $a_\gamma = 0.664(\lambda F/\gamma)^{1/2}$. Эту величину можно считать эффективной апертурой линзы. Можно легко выписать выражение с учетом членов порядка $(L/z_c)^3$, позволяющее получить поправки порядка L/F к фокусному расстоянию в приближении тонкой линзы.

При $L = L_0 = (pF_1)^{1/2}\pi/2$, с учетом $s_z = 1$, $c_z = i\gamma\pi/4$ в линейном по γ приближении, получаем выражение для пропагатора в виде

$$P(x,x') = \frac{1}{(i\lambda z_c)^{1/2}} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z_c}xx' - \gamma\frac{\pi^2}{4\lambda z_c}(x^2 + x'^2)\right]. \quad (16)$$

Из этого выражения следует, что волна при прохождении через такую линзу модулируется гауссовой функцией из-за поглощения в линзе и затем преобразуется в свое фурье-изображение. В частности, плоская волна на выходе из линзы имеет гауссову форму распределения интенсивности с шириной на половине высоты, равной $s_\gamma = 0.47(\lambda L_0 \gamma)^{1/2}$, а фокусное расстояние равно L_0. Величина s_γ определяет диаметр фокусного пятна, в то время как эффективная апертура линзы равна в этом случае $a_\gamma = 0.846(\lambda L_0/\gamma)^{1/2}$. При $L = 2L_0$, если пренебречь поглощением, пропагатор равен дельта-функции $\delta(x + x')$, то есть волновое поле восстанавливается в инверсированном виде. Очевидно, такие же свойства линза будет иметь при $L = 3L_0$, $4L_0$ и так далее. Однако поглощение уменьшает рабочую область линзы с ростом L.

В заключение приведем оценку полученных параметров. Рассмотрим составную линзу из алюминия для энергии фотонов 25 кэВ. Пусть $p = 1$ мм, $R = 0.2$ мм [2]. В этом случае имеем $\gamma = 2.02 \cdot 10^{-3}$, $F_1 = 116$ м, $L_0 = 53.4$ см. Таким образом критический размер составной линзы достигается при использовании 534 элементов. Очевидно, L_0 есть минимальное фокусное расстояние, достижимое при данном радиусе кривизны параболических поверхностей. Диаметр фокусного пятна в этом случае равен $s_\gamma = 0.11$ мкм, а эффективная апертура $a_\gamma = 97$ мкм. Меньшее фокусное расстояние можно получить, постепенно уменьшая радиус кривизны поверхностей в отдельных элементах.

1. A. Snigirev, V. Kohn, I. Snigireva, and B. Lengeler, Nature **384**, 49 (1996).
2. B. Lengeler, C. G. Schroer, M. Richwin et al., Appl. Phys. Lett. **74**, 3924 (1999).
3. Y. Ohishi, A. Q. R. Baron, M. Ishii et al., Nucl. Instr. Meth. **A467-468**, 962 (2001).
4. V. V. Protopopov and K. A. Valiev, Opt. Commun. **151**, 297 (1998).
5. V. Kohn, I. Snigireva, and A. Snigirev, Phys. Rev. Lett. **85**, 2745 (2000).