

Поглощение темной материи сверхмассивной черной дырой в центре Галактики. Роль граничных условий

М. И. Зельников¹⁾, Е. А. Васильев¹⁾

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 117333 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 декабря 2004 г.

Рассматривается эволюция распределения темной материи в центре Галактики, обусловленная сочетанием гравитационного рассеяния на звездах ядра Галактики (балджа) и поглощения сверхмассивной черной дырой в центре балджа. Основное внимание уделяется граничному условию на черной дыре: показано, что его вид зависит от энергии частиц темной материи. Вычислен модифицированный поток частиц темной материи на черную дыру и сделаны оценки количества поглощенной темной материи, которые показывают, что доля темной материи в общей массе черной дыры может быть существенна. Рассчитана плотность темной материи в центральной части балджа и показано, что обнаруженное недавно γ -излучение из центра Галактики может объясняться аннигиляцией темной материи с такой плотностью.

PACS: 95.35.+d, 95.85.Pw, 98.35.-a, 98.62.Jc

1. Введение Изучение распределения темной материи в ядрах галактик привлекает в настоящее время интерес многих исследователей как в связи с влиянием темной материи на рост сверхмассивных черных дыр, так и в контексте поиска ее возможного аннигиляционного излучения. В настоящей работе мы рассматриваем эволюцию распределения темной материи в центре Галактики под влиянием рассеяния на звездах ядра Галактики и поглощения центральной черной дырой. При этом мы предполагаем, что темная материя состоит из частиц, взаимодействующих только гравитационно и, возможно, слабо аннигилирующих (так называемых WIMPs) [1].

Взаимодействие центральной сверхмассивной черной дыры с ее окружением, в частности, с темной материей в ядре Галактики (балдже), является предметом исследования в работах [2–6] и др. Наиболее последовательным представляется подход, в котором функция распределения темной материи записывается в фазовом пространстве инвариантов движения. В случае сферически-симметричной и достаточно медленной (по сравнению с динамическим временем) эволюции такими переменными являются m , m_z – момент импульса частицы и его проекция на ось z , и

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} v(r) dr$$

– радиальное действие (адиабатический инвариант).

Мы используем модель образования гало темной материи, в которой пространственный профиль плотности ее до образования Галактики и барионного сжатия имел вид $\rho(r) \sim r^{-12/7}$, а начальная функция распределения в переменных I, m, m_z имеет вид [7]

$$f(I, m, m_z) = f_0 I^{1/8} \delta(m^2 - l_0^2 I^2), \quad (1)$$

$l_0 \sim 0.1$ – малый параметр. Подчеркнем удобство выбора в качестве основной переменной радиального действия I вместо энергии частицы E , когда речь идет об эволюции в медленно меняющемся потенциале.

1.1. Кинетическое уравнение. В нулевом приближении функция распределения темной материи в выбранных переменных не меняется при барионном сжатии. Если предположить, что черная дыра образуется в начале координат, то при росте массы черной дыры M_{bh} поглощаются частицы с моментами m , меньшими критического $m_g = 4G M_{bh}/c$, однако их количество ничтожно мало [4]. Однако существенно меняют дело эффекты, связанные с гравитационным рассеянием частиц темной материи на звездах балджа, которые приводят к диффузии частиц в фазовом пространстве [4, 6].

Эволюция функции распределения в первом приближении описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f(\{I_i\}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I_k} \left[R_{kl} \frac{\partial f}{\partial I_l} \right]. \quad (2)$$

Здесь $\{I_i\} = \{I, m, m_z\}$, а величины R_{kl} являются соответствующими коэффициентами диффузии. В силу сферической симметрии эволюции m_z выпадает

¹⁾e-mail: zelnikov@lpi.ru, eugvas@lpi.ru

из уравнений, а I можно приближенно представить в виде $I(E, m) \approx J(E) - \beta m$ [2], где для кулоновского потенциала черной дыры $\beta = 1$, а для изотермического потенциала балджа $\beta \simeq 0.6$. В дальнейшем мы будем всюду пользоваться величиной J вместо I , пользуясь тем, что нас интересует область малых моментов (из-за малости параметра l_0 в начальном распределении (1) можно при этом заменить I на J). Можно также показать, что перекрестные члены R_{12} в интересующей нас области малы [8]. Таким образом, кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial f(J, m, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial J} \left(R_{11} \frac{\partial f}{\partial J} \right) + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} \left(m R_{22} \frac{\partial f}{\partial m} \right). \quad (3)$$

Коэффициенты диффузии вычислены в [8]. Оказывается, что наиболее существенна одномерная диффузия вдоль оси m , которая приводит к потоку частиц в область малых значений момента и поглощению их черной дырой при $m \leq m_g$. Этот процесс подробно рассматривался в [4, 8]. Суть рассмотренного эффекта заключалась в следующем. Запишем уравнение (3) в одномерном виде:

$$\frac{\partial f(J, m, t)}{\partial t} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} \left(m R_{22} \frac{\partial f}{\partial m} \right). \quad (4)$$

Начальное условие берется в виде (1), а граничное условие на черной дыре задается как поглощающая граница: $f(J, m = m_g, t) = 0$. Коэффициент диффузии R_{22} , вычисленный для изотермического балджа, имеет вид

$$R_{22} = 0.46 G M_s L_c \sigma_0. \quad (5)$$

Здесь σ_0 – дисперсия скоростей балджа, M_s – масса звезд (для простоты принята одинаковой и равной $1 M_\odot$), $L_c \simeq 10$ – кулоновский логарифм.

В такой постановке решение диффузионного уравнения дает выражение для потока темной материи на черную дыру:

$$S(t) = 2(2\pi)^3 \int_0^\infty f_0 J^{1/8} S_J(t) \propto R_{22}^{9/16} t^{-7/16}. \quad (6)$$

Здесь $S_J(t)$ – поток в одномерном диффузионном уравнении (4) с начальным условием $f(t = 0) = \delta(m^2 - (l_0 J)^2)$:

$$S_J(t) = \frac{0.18}{\ln \frac{l_0 J}{2m_g}} \cdot \frac{1}{t} \exp \left(-\frac{l_0^2 J^2}{5 R_{22} t} \right). \quad (7)$$

Однако условие поглощающей границы справедливо лишь в случае $\overline{\Delta m^2} \ll m_g^2$, где Δm – среднеквад-

ратичное изменение момента за один орбитальный период $T(J)$:

$$\Delta m = \sqrt{2T(J) R_{22}} \simeq \frac{\sqrt{2\pi R_{22} J}}{\sigma_0}. \quad (8)$$

Между тем, как легко показать, это условие нарушается уже при достаточно небольших величинах энергии частицы. Уточнению влияния граничных условий на процесс поглощения темной материи черной дырой и посвящена эта работа.

Для начала определим модель строения балджа (в качестве примера возьмем нашу Галактику).

1.2. Модель балджа. Будем считать, что распределение звезд в балдже изотермическое, то есть сферически-симметрично, изотропно и имеет степенной профиль плотности с показателем -2 :

$$\rho_{s(out)}(r) = \rho_0 (r/R_0)^{-2}, \quad \rho_0 R_0^2 = \sigma_0^2 / 2\pi G. \quad (9)$$

Здесь σ_0 – дисперсия скоростей звезд, не зависящая от расстояния.

В центральной части балджа – области влияния черной дыры – профиль плотности звезд имеет меньший показатель степени [9]:

$$\rho_{s(in)}(r) = \rho_0 (r/R_0)^{-3/2}. \quad (10)$$

Здесь величины ρ_0 и R_0 те же, что в соотношении (9), что отражает непрерывность плотности звезд на границе области влияния черной дыры. Мы определим радиус области влияния таким образом, чтобы полная масса звезд внутри области равнялась массе черной дыры:

$$M_{in} = \int_0^{R_0} \rho_{s,in}(r') 4\pi r'^2 dr' = \frac{8\pi}{3} \rho_0 R_0^3 = M_{bh}, \quad (11)$$

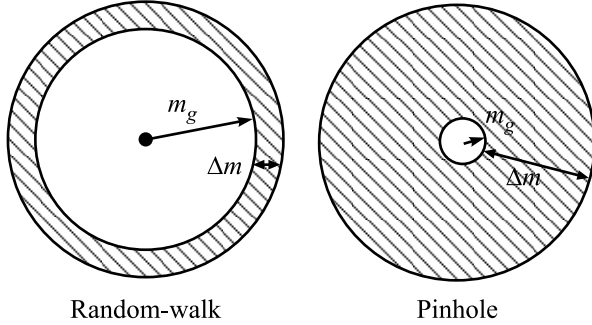
$$\frac{G M_{bh}}{R_0} = \frac{4}{3} \sigma_0^2.$$

В нашей Галактике дисперсия скоростей $\sigma_0 = 85 \div 90$ км/с, а значение R_0 в настоящий момент, соответствующее наблюдаемой массе черной дыры $M_{bh} = 3 \cdot 10^6 M_\odot$, составляет $R_0 = 1.3$ пс. Эти величины также дают согласующуюся с наблюдениями нормировку для профиля плотности звезд в центре (10).

2. Поглощение частиц черной дырой и граничные условия. Итак, как мы отметили, приближение поглощающей границы $f(m_g, J, t) = 0$ справедливо лишь в том случае, когда $\Delta m \ll m_g$, то есть изменение момента частицы за один период мало по сравнению с характерным масштабом задачи – граничным значением момента. Между тем, как легко убедиться из (8), (7), для нашей Галактики в насто-

ящий момент это несправедливо – максимум потока приходится на значения J , для которых $\Delta m \gg m_g$.

Для корректного описания процесса поглощения частиц черной дырой мы рассмотрим два предельных случая (смотри рисунок): приближение “случайного блуждания” (random-walk) – поглощение при $\Delta m \ll$



Два режима поглощения

$\ll m_g$, и приближение “игольного ушка” (pinhole), или точечного стока, при $\Delta m \gg m_g$ (названия позаимствованы из работы Лайтмана и Шапиро [10], где этот процесс рассматривался применительно к звездам).

Картина поглощения существенно отличается в приближении случайного блуждания и точечного стока. Если в первом случае функция распределения $f(m, J, t) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow m_g$, а ее производная на границе поглощения $m = m_g$ определяет величину потока, то во втором $f(m) \rightarrow f_g$ – ненулевому пределу на границе, а темп поглощения определяется из следующего соображения. Для частицы с моментом m существует вероятность за один орбитальный период получить приращение момента δm , такое что выполняется неравенство $m + \delta m < m_g$. Поток на черную дыру, с одной стороны, определяется суммой вероятностей поглощения для всех частиц за один период, а с другой, равен диффузионному потоку с больших m , где диффузионное приближение справедливо ($\Delta m < m$).

2.1. Граничное условие. Различные режимы поглощения можно описать с помощью следующей модификации граничного условия:

$$\left(f - m_g \alpha \frac{\partial f}{\partial m} \right) \Big|_{m=m_g} = 0. \quad (12)$$

При этом значения $\alpha \ll 1$ соответствуют приближению случайного блуждания, а $\alpha \gg 1$ – приближению точечного стока.

Отсюда видно, что если задать значение функции распределения на границе $f(m = m_g) = f_g$ и принять, что поток вблизи границы непрерывен и слабо

меняется при малых m , то получим следующей вид функции распределения вблизи границы:

$$f(m) = f_g \left(1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{m}{m_g} \right). \quad (13)$$

Наша задача заключается в том, чтобы найти выражение для α в случае $\alpha \gg 1$ и модифицированную величину потока $S_J(t)$ частиц с радиальным действием J на черную дыру в этом пределе.

Для этого мы вычислим число частиц, которые в результате диффузии за один орбитальный период окажутся в области $m < m_g$ и будут поглощены черной дырой. Предположим, что распределение вероятности получения заданного приращения момента частицы δm имеет гауссов вид с дисперсией $\overline{\delta m^2} = \Delta m^2$ и средним значением $\overline{\delta m} \ll \Delta m$ [10]:

$$p(m, \delta m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta m} \exp\left(-\frac{\delta m^2}{2 \Delta m^2}\right) \times \frac{1 + \delta m/m}{\frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2} \Delta m}\right) \right] + \frac{\Delta m}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m^2}{2 \Delta m^2}\right)}. \quad (14)$$

Нормировка выбрана таким образом, чтобы $\int_{-m}^{\infty} p(m, \delta m) d\delta m = 1$. Полное число частиц, поглощенных за один период,

$$Q = \int_{m_g}^{\infty} 2m dm f(m) \int_{-m}^{-(m-m_g)} p(\delta m) d\delta m = S_J T(J). \quad (15)$$

В то же время, оно же равно потоку с больших m за один период:

$$Q = S_J T(J) = m R \frac{\partial f}{\partial m} T = \frac{f_g}{\alpha} R T = \frac{f_g \Delta m^2}{2\alpha}. \quad (16)$$

В интересующем нас пределе $\Delta m \gg m_g$ получаем

$$\alpha = 2.8 \left(\frac{\Delta m}{m_g} \right)^2, \quad (17)$$

что согласуется с результатами работы [10].

2.2. Поглощение темной материи. Чтобы установить вид зависимости потока частиц на черную дыру $S_J(t)$, воспользуемся тем же приемом, что и в пределе точечного стока, рассмотренным в работе [6]. А именно, зная общий вид зависимости $S_J(t) \propto (1/t) \exp(-m_0^2/5 R t)$, произведем шивку решения $f(m, t)$ (13) и диффузионного решения – гауссианы для начального условия $f(t = 0) = \delta(m^2 - m_0^2)$. Тогда получим

$$S_J(t) = \frac{0.18}{\alpha + \ln \frac{m_0}{2m_g}} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{l_0^2 J^2}{5 R t}\right). \quad (18)$$

От предыдущего рассмотрения выражение для потока отличается дополнительным слагаемым α в знаменателе. Как уже указывалось, в настоящий момент $\alpha(J) \gg 1$ для тех J , с которых приходит максимум потока, и поэтому величина потока на самом деле намного меньше, чем вычисленная без учета поправок. Действительно, полный поток

$$S(t) = 2(2\pi)^3 \int_0^\infty dJ f_0 J^{1/8} S_J(t) \approx \\ \approx 9.5 f_0 \left(\frac{5 R_{22} t}{l_0^2}\right)^{9/16} t^{-1} (\beta + 1)^{-8/9}, \quad (19)$$

где величина

$$\beta = \frac{\sqrt{5 R_{22} t} 2\pi R_{22}}{20 l_0 \sigma_0^2 m_g^2} \approx 7 \left(\frac{t}{10^{10} \text{ лет}}\right)^{1/2} \left(\frac{M_{bh}}{3 \cdot 10^6 M_\odot}\right)^{-2} \quad (20)$$

отвечает поправке на модификацию граничного условия (12). Без учета поправки (полагая $\beta = 0$), выражение (19) приводит к степенному росту массы черной дыры $M_{bh}(t) \propto t^{9/16}$ [6]. Оценка массы напрямую зависит от параметров начального распределения темной материи f_0 и l_0 . Если принять для нашей Галактики $f_0 = 6 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot (\text{см}^2/\text{с})^{-9/8}$ и $l_0 = 0.1$, согласно [6], то получим оценку массы $M_{bh} \simeq 11 \cdot 10^6 M_\odot$ для настоящего времени ($t = 10^{10} \text{ лет} = 3 \cdot 10^{17} \text{ с}$) при пренебрежимо малой начальной массе черной дыры (в предположении, что рост массы происходит исключительно из-за поглощения темной материи, то есть это нижняя оценка массы).

Учет модификации потока существенно меняет картину. Как следует из (20), при малой массе черной дыры $\beta \gg 1$ и поток темной материи очень мал, что свидетельствует о барионной природе затравочной черной дыры. Верхнюю оценку массы поглощенной темной материи M_d можно получить из следующего рассмотрения: имея конечное условие $M_{bh}(t_0 = 3 \cdot 10^{17} \text{ с}) = M_0 = 3 \cdot 10^6 M_\odot$, решить уравнение $dM_{bh}/dt = S(t)$ и получить начальную массу $M_{bh}(0)$, тогда поглощенная масса определяется соотношением $M_d = M_0 - M_{bh}(0)$. Для принятых выше значений f_0 и l_0 получаем $M_d = 0.67 M_0 = 2 \cdot 10^6 M_\odot$; если значение f_0 уменьшить в 10 раз, то $M_d = 0.11 M_0$. Другой метод оценки заключается в задании априорного закона роста черной дыры за счет поглощения и темной, и барионной материи, в степенном виде $M_{bh}(t) = M_0(t/t_0)^\gamma$. Тогда масса поглощенной темной материи дается соотношением

$M_d = \int_0^{t_0} S(t, M_{bh}(t)) dt$. Для закона роста с показателем $\gamma = 1/2$ (полученного в работе [5] из анализа поглощения звезд) $M_d = 0.36 M_0$; при уменьшении нормировки f_0 распределения темной материи ее масса, поглощенная черной дырой, уменьшается пропорционально.

Таким образом, мы видим, что правильная постановка граничного условия существенно (приблизительно на порядок) уменьшает оценку массы темной материи, поглощенной черной дырой. При выбранной нормировке плотности темной материи поглощенная масса составляет $1/3 \div 1/2$ массы черной дыры в настоящий момент. Отметим, что аналогичное рассмотрение для поглощения звезд показывает несущественность модификации граничного условия [5]. Это связано с тем, что частицы темной материи изначально обладают малым моментом и быстрее достигают границы поглощения, поэтому в заданный момент времени поток приходит уже с больших значений J , чем в случае звезд. Соответственно и изменение вида граничного условия, происходящее при больших J , для темной материи более существенно.

3. Профиль плотности темной материи и ее аннигиляция. В качестве возможной наблюдательной проверки распределения темной материи в настоящий момент рассмотрим регистрацию γ -излучения из центра Галактики, предположительно возникающего при аннигиляции слабовзаимодействующих частиц темной материи (WIMPs). Наблюдения фотонов с энергиями несколько ТэВ проводятся на телескопе H.E.S.S., угловое разрешение которого $3' \div 5.8'$ соответствует области радиусом около 10 пс (при расстоянии до центра Галактики 8.5 кпс). В работе [11] показано, что наблюдаемый поток фотонов может быть объяснен аннигиляцией суперсимметричных частиц с массой порядка 12 ТэВ, плотность которых имеет степенной профиль и среднее значение $\sim 10^3 M_\odot/\text{пс}^3$ в пределах центральных 10 пс.

Зная функцию распределения темной материи в фазовом пространстве, нетрудно вычислить профиль ее плотности в зависимости от расстояния до центра координат:

$$\rho(r) = \frac{2\pi}{r^2} \int_{J_{\min}}^\infty dJ \frac{\partial E}{\partial J} \int_{m_g}^{m_{\max}} 2m dm \frac{f(J, m, t)}{\sqrt{2(E - \Psi(r)) - \frac{m^2}{r^2}}}. \quad (21)$$

Посчитаем, какова плотность темной материи в нашей модели в пределах центральных 10 пс. Для простоты будем считать, что потенциал в этой области определяется центральным звездным скоплением

с плотностью $\rho_s(r) = \sigma_0^2/2\pi G r^2$, где σ_0 – постоянная дисперсия скоростей. Из (13), (18) следует

$$f(J, m, t) = f_0 J^{1/8} \frac{S_J(t)}{R} \left(\alpha + \ln \frac{m}{m_g} \right) = f_0 J^{1/8} \frac{\alpha + \ln \frac{m}{m_g}}{\alpha + \ln \frac{l_0 J}{2m_g}} \frac{0.18}{Rt} \exp \left(-\frac{l_0^2 J^2}{5 Rt} \right). \quad (22)$$

Для $r \sim 10$ пс $\alpha \sim 100$, поэтому первая дробь в (22) близка к 1. Величина m_{\max} в (21) определяется равенством знаменателя нулю: $m_{\max} = 2\sigma_0 r \sqrt{\ln[\sqrt{\pi} J/\sigma_0 r]} \simeq 2\sigma_0 r$ при $J > J_{\min} = \sigma_0 r/\sqrt{\pi}$. Однако нужно иметь в виду, что аппроксимация (22) годится лишь для малых m и, в частности, полный интеграл $\int_0^{m_{\max}} f(J, m, t) 2m dm$ не должен быть больше $f_0 J^{1/8}$ из условия нормировки. Это дает ограничение $m \leq m_0 = \sqrt{5 Rt}$, которое действует для $r > r_* \simeq 2$ пс. Таким образом, внутренний интеграл в (21) равен

$$\int_{m_g}^{\min(m_{\max}, m_0)} \frac{2m dm r}{\sqrt{m_{\max}^2 - m^2}} \frac{0.18 f_0 J^{1/8}}{Rt} \exp \left(-\frac{l_0^2 J^2}{5 Rt} \right) = 2r \frac{0.18 f_0 J^{1/8}}{Rt} \exp \left(-\frac{l_0^2 J^2}{5 Rt} \right) \times \begin{cases} m_{\max} = 2\sigma_0 r & , \quad r < r_* \\ 2\sigma_0(r - \sqrt{r^2 - r_*^2}) & , \quad r > r_* \end{cases}.$$

Так как $\partial E/\partial J = 2\pi/T(J) = 2\sigma_0^2/J$, то

$$\rho(r) = 16\pi \sigma_0^3 \min \left[1, 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r} \right)^2} \right] \times \frac{0.18}{Rt} \int_{J_{\min}}^{\infty} dJ \frac{f_0 J^{1/8}}{J} \exp \left(-\frac{l_0^2 J^2}{5 Rt} \right) \simeq \frac{15 \sigma_0^3}{Rt} f_0 \left(\frac{5 Rt}{l_0^2} \right)^{1/16} \min \left[1, 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r} \right)^2} \right] \simeq 10^3 \frac{M_{\odot}}{\text{пс}^3} \cdot \left(\frac{r}{10 \text{ пс}} \right)^{-2}.$$

Таким образом, мы видим, что оценка плотности темной материи по порядку величины согласуется с наблюдениями. В любом случае плотность темной материи не превосходит плотность звезд, которая оценивается как $\rho_s(r) = 1.2 \cdot 10^6 (r/0.4 \text{ пс})^{\beta} M_{\odot}/\text{пс}^3$, где $\beta \simeq 1.5$ при $r < 0.4$ пс, $\beta \simeq 2$ при $r > 0.4$ пс

[9]. Для более точного определения профиля плотности темной материи нужно принимать во внимание эффект диффузии по J и более точное выражение для $f(J, m, t)$ для $m \gg m_g$.

4. Выводы. В данной работе было рассмотрено явление диффузии темной материи в центре Галактики, обусловленное рассеянием на звездах ядра Галактики. Диффузия рассматривается в фазовом пространстве $\{J, m, m_z\}$, где J – радиальное действие, причем для поглощения темной материи определяющей является диффузия по угловому моменту m . Наличие черной дыры задает граничное условие при $m = m_g$, вид которого различен для малых и больших значений J . Вычисленная с учетом модифицированного граничного условия величина потока $S(t)$ темной материи на черную дыру оказывается существенно меньше, чем полученное в прежних работах без учета модификации (то есть в приближении поглощающей границы). Количество темной материи, поглощенной черной дырой к настоящему моменту, может составлять существенную долю полной массы черной дыры. Получающийся в результате диффузии профиль плотности темной материи в пределах центральных 10 пс может объяснять наблюдаемый поток γ -излучения из центра Галактики, возникающего при аннигиляции частиц темной материи.

Авторы благодарят А. С. Ильина и В. И. Сироту за плодотворные дискуссии по теме исследований. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 01-02-17829, # 03-02-06745) и Landau Foundation (Forschungszentrum Jülich).

1. G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, hep-ph/0404175.
2. P. Gondolo and J. Silk, Phys. Rev. Lett. **83**, 1719 (1999).
3. D. Merritt, Phys. Rev. Lett. **92**, 201 (2004).
4. А. С. Ильин, К. П. Зыбин, А. В. Гуревич, ЖЭТФ **98**, 1 (2003); astro-ph/0306490.
5. V. A. Sirota, A. S. Ilyin, K. P. Zybin, and A. V. Gurevich, astro-ph/0403023.
6. М. И. Зельников, Е. А. Васильев, Краткие сообщения по физике **9**, 9 (2003).
7. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **165**, (1995).
8. M. Zelnikov and E. Vasiliev, Int. J. Mod. Phys. **A**, in press (2005); astro-ph/0307524.
9. R. Genzel et al., Astrophys. J **594**, 812 (2003).
10. A. Lightman and S. Shapiro, Astrophys. J. **211**, 244 (1977).
11. D. Horns, Phys. Lett. **B** (submitted); astro-ph/0408192.