

Сильные корреляции в модели калибровочно-инвариантного $(2 + 1)$ -мерного нелинейного уравнения Шредингера

А. П. Протогенов¹⁾

Институт прикладной физики РАН, 603600 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 3 января 2001 г.

Дан краткий обзор явлений, обусловленных сильными корреляциями нелинейных мод в планарных системах. Анализ ограничен моделью нелинейного уравнения Шредингера. Найдены стационарные распределения полей. Получена зависимость числа частиц от параметра, характеризующего степень зацепления мировых линий возбуждений. Показано, что при малых значениях этого параметра на двумерной решетке существует универсальное притяжение, которое может служить динамической причиной перехода в когерентное состояние. Обсуждается связь киральных нелинейных краевых мод с нарушением галилей-инвариантности рассматриваемой системы.

PACS: 05.30.Pr, 11.10.Lm, 71.10.Pm

Изучению сильных электронных корреляций в пространственно двумерных системах посвящено множество публикуемых в настоящее время работ. В работах [1–4] для исследования корреляционных эффектов в качестве модели использовалась модель калибровочно-инвариантного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Примеры и мотивация применения этого уравнения в различных областях весьма разнообразны [5–8]. Обратим внимание на две основные причины, по которым для изучения сильных корреляций в $(2 + 1)$ -мерных системах удобно выбрать модель НУШ. Первая – отчасти техническая, связана с тем, что уравнения движения в этой модели в случае стационарных состояний совпадают с уравнениями, которые получаются при варьировании функционала Гинзбурга-Ландау, дополненного слагаемым Черна – Саймонса. Такой подход интенсивно используется [9, 10] в связи с анализом квантовых состояний в такой сильно коррелированной среде, какой является несжимаемая фермионная жидкость в дробном квантовом эффекте Холла.

Вторая причина обусловлена тем, что нас интересует влияние коротковолновой квантовой динамики частиц на поведение наблюдаемых величин в инфракрасном пределе. Поскольку фаза комплексного параметра порядка “чувствует” большие расстояния, то изучение динамики ее особенностей в длинноволновом пределе позволяет извлечь дополнительную информацию о природе мелкомасштабных

сильно коррелированных состояний. Этому способствует и тот факт, что динамика калибровочных полей Черна – Саймонса, которая отражает специфику $(2 + 1)$ -мерных систем, дает существенный вклад в фазу параметра порядка. Нелокальное статистическое черн-саймоновское взаимодействие в фермионной $(2 + 1)D$ системе в длинноволновом описании кодирует квантово-групповую структуру квантовых состояний. Вместе с большой величиной константы связи оно составляет основное содержание того, что мы имеем в виду, когда говорим о сильных корреляциях.

Наибольший корреляционный вклад от калибровочного поля Черна – Саймонса в пространственную структуру параметра порядка возникает в статическом случае [11]. Чтобы это увидеть, рассмотрим $(2 + 1)D$ систему с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{k}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + i\Psi^* (\partial_t + iA_0) \Psi - \frac{1}{2} |\mathbf{D}\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4. \quad (1)$$

Из уравнений движения

$$i\partial_t \Psi = -\frac{1}{2} \mathbf{D}^2 \Psi + A_0 \Psi - g |\Psi|^2 \Psi, \quad (2)$$

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_\perp = -\frac{1}{k} |\Psi|^2, \quad (3)$$

$$\partial_t A_i + \partial_i A_0 = -\frac{1}{k} \varepsilon_{ij} j_j, \quad (4)$$

следующих из (1), где k – коэффициент Черна – Саймонса, g – константа связи, $\mathbf{j} = \mathfrak{S}(\Psi^* \mathbf{D}\Psi)$ – плотность тока, $\mathbf{D} = \nabla - i\mathbf{A}$, калибровочный потенциал

¹⁾e-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru

A_μ , являющийся вспомогательной переменной, может быть выражен через функцию Ψ следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{k} \int d^2 \mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2, \quad (5)$$

$$A_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{k} \int d^2 \mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t). \quad (6)$$

В выражениях (5) и (6) удовлетворяющая уравнению

$$\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\delta^2(\mathbf{r}) \quad (7)$$

функция Грина имеет вид

$$G_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_{ij} x_j}{r^2}. \quad (8)$$

Из этих же выражений видно, что для того, чтобы перейти к модели "классического" НУШ, когда вкладом от калибровочных полей пренебрегают, необходимо воспользоваться пределом $k \rightarrow \infty$.

Коэффициент Черна – Саймонса k имеет смысл числа зацеплений мировых линий возбуждений. Его фермионному [12] значению $k = 1$ соответствуют незацепленные мировые линии. Более содержательной является ситуация, когда параметр k является матрицей. Для некоторых систем [13] она совпадает с матрицей статистического взаимодействия Халдейна [14] в его формулировке обобщенного принципа исключения состояний. В этой работе мы будем считать для простоты, что коэффициент k есть число.

Рассматриваемая система обладает богатым спектром преобразований симметрии и соответствующих интегралов движения (см. [15, 16]). В частности, число частиц и гамильтониан равны

$$N = \int d^2 \mathbf{r} |\Psi|^2, \quad (9)$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} (|\mathbf{D}\Psi|^2 - g|\Psi|^4). \quad (10)$$

Знак константы связи g в этом выражении отвечает притяжению, то есть отрицательной длине рассеяния в z -канале, и выбран таким из соображений удобства. В дальнейшем нам понадобится также сохраняющийся генератор конформных преобразований

$$K = -t^2 H + 2tD + \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} r^2 |\Psi|^2, \quad (11)$$

выражающийся через гамильтониан H , сохраняющийся генератор D масштабных преобразований времени и среднее значение квадрата ширины распределения поля Ψ . Для статических распределений ширины поля от времени не зависит. Поскольку величина

K сохраняется, то из (11) следует, что для статических полей как D , так и H равны нулю.

Воспользовавшись тождеством [11, 15]

$$|\mathbf{D}\Psi|^2 = |(D_x - iD_y)\Psi|^2 - [\nabla \times \mathbf{A}]_\perp |\Psi|^2 - [\nabla \times \mathbf{j}]_\perp, \quad (12)$$

представим гамильтониан как

$$H = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} \left(|(D_x - iD_y)\Psi|^2 - \left(g - \frac{1}{|k|}\right) |\Psi|^4 \right). \quad (13)$$

Из этого выражения видно, что наибольшие изменения эффективной константы связи $g_{eff} = g - 1/|k|$ возникают при $|k| = 1/g$. В этом случае в (13) происходит сокращение нелинейного слагаемого $|\Psi|^4$ – эффект, наиболее ярко показывающий роль чернсаймоновских корреляций. При этом гамильтониан равен нулю на распределениях поля Ψ , удовлетворяющих уравнениям

$$(D_x - iD_y)\Psi = 0. \quad (14)$$

Калибровочный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в уравнениях (14) следует закону Гаусса (3).

Уравнения самодуальности (14) и уравнение (3) при подстановке $\Psi(\mathbf{r}) = \rho(r)e^{i\alpha(r,\vartheta)}$, $A_x = \partial_y \rho + \partial_x \alpha$, $A_y = -\partial_x \rho + \partial_y \alpha$ превращаются в уравнение Лиувилля

$$\nabla^2 \ln \rho = -\frac{1}{k} \rho^2 \quad (15)$$

с точным n -солитонным решением [11, 15, 17]

$$\Psi_n(r, \vartheta) = \frac{2\sqrt{k}}{r} n \left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^n + \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \right)^{-1} e^{i(1-n)\vartheta}. \quad (16)$$

Здесь r_0 – масштаб, $n = 1, 2, \dots$. Число частиц N на этом решении равно $4\pi n k$.

Стационарные состояния

1. Уравнения движения. Решения уравнений дуальности (14) являются уравнениями первого порядка и составляют лишь часть множества решений уравнений движения. Сейчас нас будет интересовать величина корреляционного вклада в наблюдаемые величины от решений уравнений движения, не совпадающих с решениями уравнений дуальности. Для того,

чтобы найти ответ на этот вопрос, рассмотрим стационарные состояния²⁾. В этом случае пространственные распределения поля $\Psi(\mathbf{r}, t)$, приобретая массу, становятся уже, поскольку асимптотическое поведение на больших расстояниях меняется со степенного, как в (16), на экспоненциальное. По этой причине следует ожидать уменьшения вклада калибровочных полей в корреляционные эффекты по абсолютной величине.

Будем считать, что

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = |k|^{3/2} \rho(x, y) e^{i\mu t + i\alpha(x, y, t)},$$

где $\alpha(x, y, t)$ – произвольная функция, а μ – постоянный химический потенциал. Для компенсации произвола в выборе фазы $\alpha(x, y, t)$ поля $\Psi(x, y, t)$ представим [19] решения для компонент калибровочного потенциала в виде

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{k^2}{2} w + \partial_t \alpha, & A_x &= -ku + \partial_x \alpha, \\ A_y &= -kv + \partial_y \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

и произведем масштабное преобразование координат

$$t \rightarrow \left(\frac{2}{|k|} \right) t, \quad x \rightarrow \frac{x}{|k|}, \quad y \rightarrow \frac{y}{|k|}. \quad (18)$$

Тогда в терминах функций $\rho \equiv \rho(x, y)$, $w \equiv w(x, y, t)$, $u \equiv u(x, y, t)$, $v \equiv v(x, y, t)$ и новых переменных x, y, t уравнения движения (2)–(4) могут быть записаны следующим образом:

$$\rho_{xx} + \rho_{yy} - \mu\rho = -2C\rho^3 + \rho(u^2 + v^2 - w), \quad (19)$$

$$u_y - v_x = -\rho^2, \quad (20)$$

$$u_t - w_x = -2v\rho^2, \quad (21)$$

$$v_t - w_y = 2u\rho^2. \quad (22)$$

Прямым следствием законов Гаусса (20) и Холла (21), (22) является закон сохранения числа частиц:

$$\rho_t^2 = 2((u\rho^2)_x + (v\rho^2)_y). \quad (23)$$

В уравнении (19) $C = g|k|$. При $C = 1$ в статическом пределе и с $u = (\ln \rho)_y + \partial_x \alpha$, $v = -(\ln \rho)_x + \partial_y \alpha$,

²⁾ Напомним [18], что уравнения для стационарных распределений поля в системах с постоянным числом частиц совпадают с уравнениями, описывающими статические конфигурации полей в системах с переменным числом частиц.

$w = -\rho^2$ эти уравнения совпадают с уравнением Лиувилля (14). Имея в виду, что для амплитуды поля ρ , его характерного масштаба L и константы C справедливы соотношения

$$\rho_{\mu \neq 1}^2 = \sqrt{\mu} \rho_{\mu=1}^2, \quad L_{\mu \neq 1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} L_{\mu=1}, \quad C_{\mu \neq 1} = \sqrt{\mu} C_{\mu=1}, \quad (24)$$

мы можем без ограничения общности считать в (19), что $\mu = 1$.

Из (11) следует³⁾, что $\partial^2 / \partial t^2 \int d^2 \mathbf{r} r^2 |\Psi|^2 = 4H$. Поэтому, если при $H > 0$ эффективная ширина поля Ψ увеличивается с течением времени по параболическому закону, то при $H < 0$ существует такой момент времени, когда ширина поля обращается в нуль. Это явление указывает на то, что в системе возможен коллапс распределения поля, который в рассматриваемом контексте изучался в работе [21]. При этом было установлено, что нестационарные состояния в автомодельных переменных удовлетворяют уравнениям, по форме совпадающим с уравнением (19). Отсутствие в общем случае интегрируемости этого уравнения было проверено [19] с помощью адаптированного [22] теста Пенлеве, с выделением в решении особенностей, которые принадлежат двумерным нестационарным многообразиям.

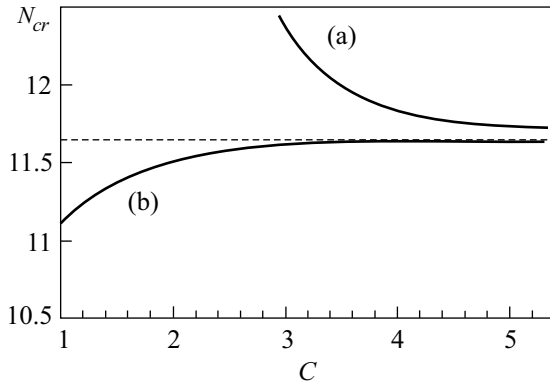
Мы видим, что значение $H = 0$ является границей, разделяющей два различных временных режима поведения полей. В дальнейшем нас будут интересовать такие конфигурации поля $\rho(x, y)$, для которых гамильтониан равен нулю, и их вклад в выражение (9) для числа частиц. При подстановке решений уравнений (19)–(22) в (9) результат будет зависеть от значения C – единственного параметра нашей задачи, а величина вклада будет определять относительную роль различных секторов теории, отвечающих разным значениям коэффициента k .

Методы и результаты численного интегрирования системы уравнений (19)–(22) изложены в работах [1, 2]. Там же показаны конфигурации полей ρ, u, w . Зависимость критического числа частиц N_{cr} от параметра C , вычисленная для состояний с $H = 0$ с использованием найденных распределений поля $\rho(x, y)$, изображена на рисунке (кривая (а)).

Поясним смысл зависимости $N_{cr}(C)$ и причину существования ее особенности. Поскольку второе слагаемое $\rho(u^2 + v^2 - w)$ в правой части уравнения (19)

³⁾ Это утверждение в литературе носит название теоремы В. И. Таланова [20].

положительно и, следовательно, описывает корреляционное отталкивание, то оно эффективно уменьшает⁴⁾ значение константы связи g , входящей в первое слагаемое в этом уравнении и во второе слагаемое в гамильтониане. Поэтому для восстановления нулевого значения гамильтониана (10) требуются большие значения поля Ψ по сравнению со случаем $k \rightarrow \infty$. Это приводит к увеличению критического числа частиц $N_{cr}(C)$, если его сравнивать со значением $N_{cr}(\infty) = 11.703$. Расположение кривой $N_{cr}(C)$ над асимптотой $N_{cr}(\infty)$ отражает существование в рассматриваемой модели отталкивания благодаря корреляционному взаимодействию между левыми конфигурациями.



Зависимость критического числа частиц от параметра $C = g|k|$ для непрерывной (19) (a) и решеточной (29) (b) моделей калибровочно инвариантного НУШ. Штриховая линия показывает значение $N_{cr} = 11.605$ – критического числа частиц на решетке при пренебрежении черн-саймоновскими корреляциями

Другая особенность функции $N_{cr}(C)$ заключается в том, что при уменьшении параметра $C = g|k|$ она возрастает до тех пор, пока не расходится при $C_{cr} = 2.83$. Причина этого явления связана с тем, что при уменьшении C относительный вклад в решения от слагаемого $\rho(u^2 + v^2 - w)$ возрастает, а при $C = C_{cr}$ вклады от первого и второго слагаемых в (19) при формировании решения сравниваются. В этой точке вместе с изменением знака правой части в уравнении (19) и знака химического потенциала изменяются спектральные свойства операторов задачи, что ведет к расходимости функции $N_{cr}(C)$ при $C = C_{cr}$.

⁴⁾Это слагаемое, масштабно пропорциональное l^5 (первое слагаемое в правой части (19) при замене $\rho \rightarrow l\rho$ пропорционально l^3), описывает, с другой стороны, перенормировку химического потенциала μ .

Приводящий к расходимости функции $N_{cr}(C)$ эффект сильной перенормировки затравочного взаимодействия, которое представлено первым слагаемым в правой части (19), возникает из-за преувеличенного значения вклада больших по амплитуде калибровочных полей, так как он пропорционален неограниченной функции $u^2 + v^2 - w$. Это выражение справедливо, строго говоря, в длинноволновом пределе, когда калибровочные поля невелики. Для корректного учета вклада произвольно больших по амплитуде калибровочных полей и решения проблемы существования функции $N_{cr}(C)$ при малых значениях параметра C необходимо сформулировать решеточный аналог модели (19)–(22). Решеточная компактификация модели ограничивает вклад калибровочных полей по абсолютной величине, оставляя их значения произвольно большими.

2. Дискретная динамика. Формулировка калибровочной теории на решетке предполагает использование производных

$$\nabla_k^+ \rho(\mathbf{r}) \equiv e^{iA_k(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r} + \mathbf{e}_k) - \rho(\mathbf{r}), \quad (25)$$

$$\nabla_k^- \rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(\mathbf{r}) - e^{-iA_k(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r} - \mathbf{e}_k) \quad (26)$$

и лапласиана

$$\Delta(A) \equiv \nabla_k^+ \nabla_k^- = \hat{t}_x + \hat{t}_y + h.c. - 4. \quad (27)$$

Здесь индекс k указывает направление единичного вектора \mathbf{e}_k на решетке, $\hat{t}_x \equiv e^{\frac{\partial}{\partial m} + iA_{\hat{m},n}}$ — оператор магнитных трансляций; обозначение $A_{\hat{m},n}$ соответствует тому, что компонента калибровочного потенциала $A_x(m, n)$ зависит от координат $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ узла решетки, будучи определенной на звене с координатами концов $(m, n), (m + 1, n)$. Плотность $\rho_{m,n}^2$ числа частиц в соответствие с правилами решеточной калибровочной теории определена в узлах дуальной решетки.

Та же самая причина, которая привела нас к необходимости формулировки теории на пространственной решетке, учитывая немалые значения векторного потенциала, диктует необходимость включить в рассмотрение дискретное время. С учетом калибровочной инвариантности высказанным требованиям к теории отвечает для стационарных состояний $\Psi = \rho_{m,n} e^{it}$ следующая замена в уравнении движения (2):

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - A_0 \right) \Psi &\rightarrow \frac{i}{2} \left(e^{\frac{\partial}{\partial t} + iA_0} - e^{-\frac{\partial}{\partial t} - iA_0} \right) \Psi = \\ &= -\Psi \sin(A_0 + 1). \end{aligned} \quad (28)$$

Мы видим, что условие единообразности представления вклада от всех компонент калибровочных связей A_μ в виде e^{iA_μ} , то есть использование на равных правах экспоненты Вилсона e^{iA_k} и Полякова e^{iA_0} , вместе с требованием калибровочной инвариантности ведет к необходимости рассматривать время t как дискретную переменную. Тот факт, что движение по пространственной решетке нуждается в дискретной эволюции рассматривался для гиперболического оператора в уравнении синус-Гордона в работе [23]. Поскольку A_0 играет роль химического потенциала, то представление e^{iA_0} для его вклада означает физически, что энергия системы не может измениться на произвольно большую величину при добавлении в систему одной частицы, несущей с собой энергию, равную A_0 .

С использованием (27) и (28) уравнение движения в модели дискретного калибровочно инвариантного НУШ имеет для стационарных состояний следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left(e^{\frac{\partial}{\partial m} + iA_{m,n}} + e^{\frac{\partial}{\partial n} + iA_{m,n}} + \text{h.c.} - 4 \right) \rho_{m,n} = \\ & = -2C\rho_{m,n}^3 - \rho_{m,n} \sin(w_{m,n} - 1). \end{aligned} \quad (29)$$

В отличие от задачи Ховштадтера о состояниях и спектре частицы на решетке во внешнем магнитном поле [24], в этом уравнении компоненты векторного потенциала $A_k(m, n) = (A_{\hat{m},n}, A_{m,\hat{n}})$, входящие в лапласиан, определяются той же функцией, на которую он действует:

$$A_{\hat{m},n} = \sum_{m',n'} \nabla_2 G(m - m', n - n') \rho_{m',n'}^2. \quad (30)$$

Скалярный потенциал для решеточного аналога выражений (6), (17) равен

$$\begin{aligned} w_{m,n} = & \sum_{m',n'} [(\nabla_2 G(m - m', n - n')) \times \\ & \times (\rho_{m',n'}^2 + \rho_{m',n'+1}^2) A_{m',\hat{n}'} - \\ & - (\nabla_1 G(m - m', n - n')) (\rho_{m',n'}^2 + \rho_{m'+1,n'}^2) A_{\hat{m}',n'}], \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} G(m - m', n - n') = & \\ = & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\{k_x(m-m') + k_y(n-n')\}} - 1}{4 - 2 \cos k_x - 2 \cos k_y}, \end{aligned} \quad (32)$$

функция Грина на решетке $\nabla_{1,2} f(\mathbf{r}) \equiv f(\mathbf{r} + \mathbf{e}_{1,2}) - f(\mathbf{r})$.

Численное интегрирование системы уравнений (29)–(32) было проведено в работах [3, 4], где с помощью найденных распределений поля была вычислена зависимость $N_{cr}(C)$. Она показана на рисунке (кривая (b)). Компактификация модели, устранив расходимость функции $N_{cr}(C)$ при $C = C_{cr}$, позволила провести вычисления в области $1 \leq C \leq 2.83$. Полевые конфигурации оказались качественно похожими на те, которые существуют в непрерывном случае. Однако знак корреляционного взаимодействия оказался противоположным тому, который был в непрерывной модели. Расположение кривой $N_{cr}(C)$ под асимптотой $N_{cr}(\infty)$ означает, что в системе существует универсальное корреляционное притяжение между полевыми конфигурациями. При анализе симметрии основного состояния в рамках теории возмущений с $k \gg 1$ этот эффект был обнаружен в работах [25–27].

Причину явления можно понять следующим образом. В непрерывном пределе между собой конкурировали затравочное взаимодействие НУШ и калибровочное взаимодействие Черна – Саймонса в его длинноволновом полиномиальном представлении. Сейчас к ним в качестве оппонента по отношению к затравочному взаимодействию НУШ подключилось воздействие калибровочного поля на дисперсию. Поскольку речь идет о таком влиянии калибровочного поля, которое уменьшает производные функции Ψ , то оно привело к уменьшению “кинетического” слагаемого в гамильтониане. При условии $H = 0$ это вызвало уменьшение амплитуды поля Ψ и, следовательно, N_{cr} . С длинноволновой точки зрения уменьшение амплитуды поля Ψ в (10) при постоянном значении H может быть скомпенсировано только за счет увеличения константы связи g .

Разложив в ряд по производным оператор $\Delta(A)$, мы найдем в нем слагаемое

$$\cos A_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cos A_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (33)$$

описывающее длинноволновое представление лапласиана (27). Из него видно, что в рассматриваемой системе существует несколько эффектов. Во-первых, конечные значения калибровочного поля делают коэффициенты в (33) меньшими единицы, то есть увеличивают массу квазичастиц. Во-вторых, ненулевые значения калибровочного поля в множителях в (33) формируют распределения поля $\rho_{m,n}$ с нарушенной аксиальной симметрией, что подтвердилось в численных расчетах. При этом относительное изменение характерного размера кора солитона поля $\rho_{m,n}$ при $C \gtrsim 1$ не превышает двух процентов. Из-за того, что

максимальное изменение $(N_{cr}(1) - N_{cr}(\infty))/N_{cr}(\infty)$ также невелико и составляет несколько процентов, в системах с энергетическим масштабом порядка 1 эВ величина добавки к константе связи по порядку величины составляет в физических единицах сто градусов.

Киральные моды

Проблема существования размерных редукций неинтегрируемой [28] в общем случае задачи (19)–(22), а также построение решений статического уравнения (15) с использованием метода работы [22] и преобразования Беклунда обсуждались подробно в работах [29, 30]. Здесь мы обратим внимание только на некоторые стороны, связанные с особенностями точных решений в пространственно одномерных системах.

Простейшая одномерная интегрируемая ситуация [19] возникает в случае, когда все функции в уравнениях (19)–(22) зависят от комбинации $\xi = a_1x + a_2y$ координат x, y , где одна из констант a_1, a_2 может быть равна нулю. Тогда для $a_1 = 1, a_2 = \gamma$, например, можно ввести такую фазу $\alpha(\xi, t)$ функции $\Psi(\xi, t) = \rho(\xi, t)e^{-i\alpha(\xi, t)}$, что $\partial_\xi \alpha = (u + \gamma v)/(1 + \gamma^2)$, $\partial_t \alpha = w - u^2 - v^2 + (u + \gamma v)/(1 + \gamma^2)$. При этом функция $\Psi(\xi, t)$ будет удовлетворять (1 + 1)D НУШ:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (1 + \gamma^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = -2C |\Psi|^2 \Psi \quad (34)$$

с его точным решением: $\alpha(\xi, t) = r_0^2 t$,

$$\rho = \frac{r_0}{-\frac{r_0 \xi}{\sqrt{1 + \gamma^2}}}, \quad v = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \operatorname{th} \frac{r_0 \xi}{\sqrt{1 + \gamma^2}},$$

$$w = r_0^2 \left(\operatorname{th}^2 \frac{r_0 \xi}{\sqrt{1 + \gamma^2}} - 1 \right), \quad u = -\gamma v, \quad (35)$$

где r_0 – константа интегрирования.

Для обсуждения свойств одномерных киральных конфигураций поля обратимся к модели (1 + 1)D НУШ [31]

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \lambda j \Psi, \quad (36)$$

нелинейность в которой представлена током $j = \Im \Psi^* \partial_x \Psi$, а не плотностью $|\Psi|^2$, как в (34). Выражая плотность тока $j = \rho^2 \partial_x \alpha$ через модуль и фазу функции $\Psi = \rho e^{i\alpha}$, мы видим, что возникает обычное НУШ, в котором константа связи $g(x, t) = \lambda \partial_x \alpha$ промодулирована за счет пространственного изменения фазы. Для распространяющейся волны $\alpha(x, t) = \kappa x - \omega t$ плотность тока $j = v \rho^2$, где $v \equiv \kappa$, так что

$g = \lambda v$. Из условия существования солитона $g > 0$ следует, что $v > 0$. Таким образом, солитон

$$\Psi(x, t) = \frac{a}{\sqrt{\lambda v - [a(x - vt)]}} e^{iv(x - ut)} \quad (37)$$

может двигаться только направо, то есть представляет собой киральное распределение поля. Здесь $a = v\sqrt{1 - 2u/v}$, $u = \omega/\kappa$ – фазовая скорость.

Множитель $1/\sqrt{v}$ отражает в (37) условие того, что скорость солитона должна быть положительной. В частности, солитон не может быть остановлен. Поскольку скорость не может быть произвольно изменена, то мы имеем дело с системой, в которой нарушена галилеева инвариантность.

Свойства киральных краевых мод с линейным законом дисперсии в таком явлении, как дробный эффект Холла, описываются с использованием в лагранжиане черн-саймоновского члена. При помощи пространственной редукции покажем, следуя [31], что модель с уравнением движения (36) частично соответствует черн-саймоновской модели (1) без слагаемого $g|\Psi|^4$. Для этого будем считать, что все поля в (1) от координаты y не зависят, и обозначим $A_y = B$. Тогда лагранжиан (1) превратится в лагранжиан B - F -теории:

$$\mathcal{L}_{(1+1)} = \frac{k}{2} B \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i \Psi^* (\partial_t + i A_0) \Psi - \frac{1}{2} |(\partial_x + i A_x) \Psi|^2 - \frac{1}{2} B^2 |\Psi|^2, \quad (38)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $x^\mu = \{t, x\}$, $A_\mu = (A_0, A_x)$. Поскольку кинетическое слагаемое для полей B и A_μ в этом выражении отсутствует, то за счет выбора фазы поля Ψ они могут быть полностью устранены. При этом получается лагранжиан системы, в которой все взаимодействия исчезают (см. (34)). Для того чтобы полям Ψ разрешить взаимодействовать с помощью калибровочных полей, нужно сделать потенциал A_μ и поле B динамическими, добавив в (38) кинетическое слагаемое для поля B . Выбор [29] плотности лагранжиана $\mathcal{L}_B = \partial_t B \partial_x B$ ведет к сумме $\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{(1+1)}$, которая эквивалентна лагранжиану

$$\mathcal{L} = i \Psi^* \partial_t \Psi - \frac{1}{2} \left| (\partial_x + i \frac{\lambda}{2} |\Psi|^2) \Psi \right|^2 \quad (39)$$

с $\lambda = 2k^2$, где k – коэффициент в действии Черна – Саймонса. При варьировании (39) получается [31] уравнение движения, которое после подстановки $\Psi(x, t) \rightarrow \exp\{i \frac{\lambda}{2} \int_0^x ds |\Psi(s, t)|^2\} \psi(x, t)$ и с учетом уравнения непрерывности $\partial_t |\Psi|^2 + \partial_x j = 0$ совпадает с уравнением киральной модели (36). При этом

осознается и причина галилеевой неинвариантности, которая возникает из-за слагаемого \mathcal{L}_B .

Заключение

Функция Ψ в использованных вариантах модели НУШ имеет смысл параметра порядка эффективной теории Гинзбурга – Ландау, описывающей некоторое когерентное состояние (см. (16), (37)). В решеточных сильно коррелированных планарных системах, где пространственный корреляционный масштаб ξ всего на один порядок превышает постоянную решетки, она с точки зрения расстояний $L \gtrsim \xi$ является классической переменной. Вычисляя, однако, импульс $P_i = \partial\mathcal{L}/\partial A_i$ из (1) и пользуясь канонической скобкой Пуассона для координаты и импульса, мы получаем следующую скобку Пуассона для координат $X \equiv A_x$, $Y \equiv A_y$ нашей системы:

$$\{X, Y\} = 1/k. \quad (40)$$

Эта скобка отражает некоммутативную геометрию плоскости. Физические следствия ее существования обсуждались в работе [32], где показано, что вторым параметром в двухпараметрическом центральном расширении группы Галилея в размерности $(2+1)$ является спин $s = 1/k$. Этот эффект с использованием подстановки Пайерлса $\partial_\mu + iA_\mu \rightarrow e^{\partial_\mu + iA_\mu}$ (25)–(27) и холловской динамики (21), (22) был рассмотрен также в работе [33].

В квантовой теории скобка Пуассона заменяется коммутатором, и калибровочный потенциал A_μ является векторным оператором, пространственные проекции которого, вследствие (40), вообще говоря, не коммутируют. Поэтому о поле A_μ , как о классической переменной, можно говорить только в случае состояния, для которого правая часть в (40) равна нулю. Это когерентное состояние, характеризующееся восстановленным равноправием x, y -направлений, имелось в виду в настоящей работе. Механизм сокращения правой части коммутатора канонически сопряженных величин, а именно $-x, y$ -компонент операторов трансляций, за счет вклада краевых мод обсуждался давно [34], однако детали его по-прежнему остаются открытой актуальной проблемой.

Автор выражает благодарность С. Н. Власову, В. Е. Захарову, Е. А. Кузнецову, А. Г. Литваку и В. И. Таланову за полезные обсуждения, а также Российскому фонду фундаментальных исследований (грант # 98-02-16237) за поддержку.

1. L. A. Abramyan and A. P. Protogenov, Письма в ЖЭТФ **64**, 807 (1996).

2. L. A. Abramyan, V. I. Berezhiani, and A. P. Protogenov, Phys. Rev. **E56**, 6026 (1997).
 3. Л. А. Абрамян, В. А. Вербус, А. П. Протогенов, ЖЭТФ **114**, 747 (1998).
 4. L. A. Abramyan, A. P. Protogenov, and V. A. Verbus, Письма в ЖЭТФ **69**, 839 (1999).
 5. A. G. Litvak, *Dynamic nonlinear electromagnetic phenomena in plasma*, in: Review of Plasma Physics, Ed. M. A. Leontovich, Consultants Bureau, N.Y., 1986, p.10.
 6. *Singularities in Fluids, Plasmas and Optics*, Ed. R. E. Caflisch and G. C. Papanicolaou, NATO ASI ser., p.404, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 1993.
 7. V. E. Zhakharov, Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972).
 8. E. A. Kuznetsov and S. K. Turitsyn, Sov. Phys. JETP **55**, 844 (1982); **67**, 1583 (1988).
 9. S. C. Zhang, H. T. Hansson, and S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **62**, 307 (1989).
 10. E. Fradkin, C. Nayak, A. Tsvelik, and F. Wilczek, Nucl. Phys. **B 516**[FS], 704 (1998); E. Fradkin, C. Nayak, and K. Schoutens, Nucl. Phys. **B 546**[FS], 704 (1999).
 11. R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **64**, 2969 (1990); **C66**, 2682 (1991).
 12. A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A3**, 325, (1988).
 13. T. Fukui and N. Kawakami, Phys. Rev. **B51**, 5239 (1995); cond-mat/9504118.
 14. F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **67**, 937 (1991).
 15. R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. **D42**, 3500 (1990); Prog. Theor. Phys. Suppl. **107**, 1 (1992).
 16. I. V. Barashenkov and A. O. Harin, Phys. Rev. Lett. **72**, 1575 (1994); Phys. Rev. **D52**, 2471 (1995).
 17. G. Dunne, *Self-Dual Chern-Simons Theories*, Lect. Not. **36**, Springer, Berlin, 1995.
 18. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч.2, М.: Наука, 1978, с.145.
 19. M. Knecht, R. Pasquier, and J. Y. Pasquier, J. Math. Phys. **36**(8), 4181 (1995).
 20. V. I. Talanov, Sov. Radiophys. **9**, 260 (1966); S. N. Vlasov, V. A. Petrishchev, and V. I. Talanov, Radiophys. and Quantum Electronics **14**, 1062 (1974).
 21. L. Bergé, A. de Bouard, and J. C. Saut, Phys. Rev. Lett. **74**, 3907 (1995).
 22. J. Weiss, M. Tabor, and G. Carnevale, J. Math. Phys. **24**, 522 (1983); J. Weiss, *ibid.* **24**, 1405 (1983).
 23. L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz Works for Integrable Model*, Les-Houches Lectures, hep-th/9605187.
 24. P. B. Wiegmann and A. V. Zabrodin, Phys. Rev. Lett. **72**, 1890 (1994).
 25. Ya. I. Kogan, Pis'ma v ZhETF **49**, 194 (1989).
 26. Ya. I. Kogan and I. V. Polubin, Pis'ma v ZhETF **51**, 496 (1990).
 27. D. V. Khveshchenko and Ya. I. Kogan, Pis'ma v ZhETF **50**, 137 (1989); Mod. Phys. Lett. **B4**, 95 (1990).

28. D. Lévy, L. Vinet, and P. Winternitz, *Ann. Phys.* **230**, 101 (1994).
29. U. Aglietti, L. Griguolo, R. Jackiw et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4406 (1996).
30. P. A. Horvathy and J.-C. Yera, *Phys. Rev.* **D54**, 4171 (1996).
31. R. Jackiw, *J. Non. Lin. Math. Phys.* **4**, 241 (1997).
32. R. Jackiw and V.P. Nair, *Anyon spin and the exotic central extension of the planar Galilei group*, hep-th/0003130.
33. C. Duval and P. A. Horváthy, *The exotic Galilei group and "Peierls substitution"*, hep-th/0002233.
34. Y.H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, and B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.* **B3**, 1001 (1989).