Письма в ЖЭТФ, том 73, вып. 6, с. 317 – 319 © 2001 г. 25 марта

Спирально-логарифмические структуры в модели ферромагнетика Гейзенберга

Е. Ш. Гутшабаш[1)]

НИИ физики Санкт-Петербургского государственного университета
198504 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 7 февраля 2001 г.

В качестве стационарного решения дефомированного уравнения модели Гейзенберга предложена спирально-логарифмическая структура, и на этом фоне построены одно- и N-солитонные решения.

PACS: 52.35.Sb

Спиральные (несоизмеримые) структуры в ферромагнетиках давно и хорошо изучены [1, 2]. Механизм их возникновения обусловлен взаимодействием магнитных моментов с электронами проводимости, приводящим к перестройке поверхности Ферми[2)]. Математически – в контексте метода обратной задачи рассеяния – они использовались, в частности, в качестве граничных условий при интегрировании нелинейной $O(3)$-сигма-модели в размерности (2+0) (двумерного стационарного ферромагнетика Гейзенберга) [4].

В данной работе в рамках конкретной модели мы продемонстрируем теоретическую возможность существования новых магнитных структур, которые естественно назвать спирально-логарифмическими.

Рассмотрим цилиндрически-симметричные конфигурации в модели "деформированного" магнетика Гейзенберга [5]:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \left(\mathbf{S}_{xx} + \frac{1}{x}\mathbf{S}_x \right), \tag{1}$$

где $\mathbf{S}(x,t) = (S_1, S_2, S_3)$ — вектор намагниченности, $\mathbf{S}^2 = 1$; $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; x_1, x_2 – декартовы координаты на плоскости. Задача Коши для уравнения (1) решалась в [5] методом обратной задачи рассеяния на тривиальном фоне, причем там было показано, что любые локализованные при $t = 0$ возмущения расплываются.

Прямым вычислением, однако, можно убедиться, что вектор $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)}$ с компонентами

$$S_1^{(1)}(x) = \sin(\ln x + \theta_0), \qquad S_2^{(1)}(x) = \cos(\ln x + \theta_0), \quad S_3^{(1)}(x) = 0, \tag{2}$$

где $\theta_0 \in \mathbb{R}$ – константа, $x > 0$, также является (стационарным) решением уравнения (1). Используя теперь то обстоятельство, что это уравнение является вполне интегрируемым, построим его точные решения на фоне структуры (2). Для этого представим (1) в виде условия совместности линейной матричной системы:

$$\Psi_x = U_1 \Psi \Lambda, \quad \Psi_t = V_1 \Psi \Lambda + V_2 \Psi \Lambda^2, \tag{3}$$

где $U_1 = -(i/2)S$, $V_1 = (1/2)S_x S + i(AS + SA)$, $V_2 = (i/2)S$, $S = \sum\limits_{i=1}^{i=3} S_i \sigma_i$, σ_i – матрицы Паули, $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda, \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – параметр, а матрица $A = A(S)$ определяется из условия

$$\big[A(S)S + SA(S)\big]_x = -\frac{1}{4ix}\big[S, S_x\big], \tag{4}$$

причем дополнительно будем предполагать, что при $x \to \infty$ элементы матрицы $(S - S^{(1)})$ убывают достаточно быстро.

В качестве метода решения уравнения (1) будем использовать метод матричного преобразования Дарбу [6]. Положим

$$\tilde{\Psi} = \Psi - L_1 \Psi \Lambda, \tag{5}$$

где $L_1 = \Psi_1 \Lambda_1^{-1} \Psi_1^{-1}$, а Ψ_1 – некоторое фиксированное решение (3), соответствующее выбору $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)}$, $\lambda = \lambda_1$.

Проверка ковариантности системы (3) относительно преобразования (5) приводит к одевающим соотношениям ($U_1 = -(i/2)S^{(1)}$)

$$\tilde{U}_1 = L_1 U_1 L_1^{-1}, \quad \tilde{U}_1 = U_1 - L_{1x}, \tag{6}$$

$$\tilde{V}_2 = L_1 V_2 L_1^{-1}, \;\; \tilde{V}_1 = V_1 - L_{1t}, \;\; \tilde{V}_2 = V_2 - L_1 V_1 + \tilde{V}_1 L_1. \tag{7}$$

Эквивалентность всех этих выражений можно доказать после ряда простых вычислений. Второе соотношение в (6) удобно переписать как

[1)] e-mail: gutshab@EG2097.spb.edu

[2)] Отметим также недавнюю работу [3], в которой обсуждалось появление спиральных структур в неабелевых калибровочных теориях.

$$\tilde{U}_1 = U_1 - \Psi_1\left[\Psi_1^{-1}\Psi_{1x}, \Lambda_1^{-1}\right]\Psi_1^{-1}. \qquad (8)$$

Из свойства матрицы S: $\sigma_2 S\sigma_2 = -\bar{S}$ имеем: $\sigma_2 U_1\sigma_2 = \bar{U}_1$. Поэтому матрица Ψ_1 принимает вид

$$\Psi_1 = \left(\begin{array}{cc} \varphi_1 & -\bar{\chi}_1 \\ \chi_1 & \bar{\varphi}_1 \end{array} \right), \qquad (9)$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(x,t,\lambda_1)$, $\chi_1 = \chi_1(x,t,\lambda_1)$ – комплекснозначные функции, подлежащие определению.

Матрица A, входящая в (4), при любой S должна удовлетворять условию $\mathrm{Tr}(AS+SA) = g(t)$, где $g(t)$ – произвольная функция (в дальнейшем полагаем $g(t) = 0$). Кроме того, принимая во внимание, что $\sigma_2 SS_x\sigma_2 = \overline{SS}_x$, с учетом (4) получаем: $\overline{A} = \sigma_2 A\sigma_2$. Нетрудно видеть, далее, что уравнение (1), а также правая часть (4) инвариантны относительно замены $S \to S^{(f)} = S + f(x)I$, где $f(x)$ – произвольная, вообще говоря, комплекснозначная функция, I – единичная 2×2 матрица. Полагая $A(S) = (a_{ij}(S))$, приведем (4) при условии (2) к виду $\mathrm{diag}\left((2ia_{11}^0(S^{(f)})f)_x, -(2ia_{11}^0(S^{(f)})f)_x\right) = \mathrm{diag}\,(1/2x^2, -1/2x^2)$, где $a_{11}(S^{(f)}) = ia_{11}^0(S^{(f)})$, $a_{11}^0 = \bar{a}_{11}^0$, а элемент $a_{21}(S^{(f)})$ равен нулю. Отсюда следует, что $f(x) = i/4x$, $a_{11}^0 = 1$; при этом: $A(S^{(f)})S^{(f)} + S^{(f)}A(S^f) = A(S)S + SA(S)$, что гарантирует сохранение в окончательных формулах всех свойств матрицы S.

Для построения явных решений заметим, что на затравочном решении (2) система (3) с учетом условия (4) приводится к следующей системе скалярных уравнений ($\theta = \ln x + \theta_0$):

$$\begin{aligned} \varphi_{1x} &= -\frac{1}{2}\lambda_1 e^{i\theta}\chi_1, \quad \chi_{1x} = \frac{1}{2}\lambda_1 e^{-i\theta}\varphi_1, \\ \varphi_{1t} &= -\frac{1}{2}\lambda_1^2 e^{i\theta}\chi_1, \quad \chi_{1t} = \frac{1}{2}\lambda_1^2 e^{-i\theta}\varphi_1. \end{aligned} \qquad (10)$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_{1t} - \lambda_1\varphi_{1x} = 0, \ \ \chi_{1t} - \lambda_1\chi_{1x} = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, $\varphi_1(x,t) = F(x+\lambda_1 t)$, $\chi_1(x,t) = G(x+\lambda_1 t)$, где F, G – некоторые функции, принимающие постоянные значения на характеристике $x+\lambda_1 t = \mathrm{const}$. Для их определения необходимо решить систему (10), например, при $t=0$. При этом уравнение для $\varphi_1(x,0)$ сводится к следующему:

$$x\varphi_{1xx} - i\varphi_{1x} + \frac{1}{4}\lambda_1^2\varphi_1 = 0. \qquad (12)$$

Это уравнение имеет решение [7]. $\varphi_1(x,0) = x^{i/2+1/2}Z_{i/2+1/2}(-\lambda_1 x/2)$, где $Z_\nu(s) = C_1 I_\nu(s) + C_2 Y_\nu(s)$, I_ν, Y_ν – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, C_1, C_2 – произвольные постоянные, причем требование конечности решения в нуле приводит к условию $C_2 = 0$. Тогда решение системы (10) принимает вид

$$\begin{gathered} \varphi_1(x,t) = C_1 q^{i/2+1/2} I_{i/2+1/2}\left(-\frac{\lambda_1}{2}q\right), \\ \chi_1(x,t) = \\ = -\frac{2}{\lambda_1}C_1 e^{-i\theta(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}\left[q^{i/2+1/2}I_{i/2+1/2}\left(-\frac{\lambda_1}{2}q\right)\right], \end{gathered} \qquad (13)$$

где $q = q(x,t) = x + \lambda_1 t - x_0$, $\theta(x,t) = \ln q + \theta_0$, x_0 – начальная точка.

Это позволяет построить простейшее односолитонное решение. Оно, однако, оказывается довольно громоздким, поэтому мы приведем его, используя (8), в форме[3] ($S_+ = S_1 + iS_2$, $S_+[1] \equiv \tilde{S}_+$)

$$\begin{gathered} S_+[1](x,t) = ie^{-i\theta} - \\ -\frac{4\lambda_{1I}\rho_1\left[(\ln\rho_1)_x - |\rho_1|^2(\ln\bar{\rho}_1)_x\right]}{|\lambda_1|^2(1+|\rho_1|^2)^2}, \\ S_3[1](x,t) = \frac{8\lambda_{1I}|\rho_1|^2 Re(\ln\rho_1)_x}{|\lambda_1|^2(1+|\rho_1|^2)^2}, \end{gathered} \qquad (14)$$

где[4]

$$\begin{gathered} \rho_1 = \rho_1(x,\ t) = \chi_1/\varphi_1 = \\ = -(2/\lambda_1)e^{-i\theta(x,t)}\left\{\ln\left[q^{(i+2)/2}I_{(i+2)/2}(-\lambda_1 q/2)\right]\right\}_x. \end{gathered}$$

Таким образом, данное решение несингулярно, зависит от четырех параметров: λ_{1R}, λ_{1I}, x_0 и θ_0, где $\lambda_1 = \lambda_{1R} + i\lambda_{1I}$ и характеризуется поведением единственной комплекснозначной функции $\rho_1(x,t)$. Отметим также появление в спектре возбуждений модели (1) сателлитов основной "гармоники" с несоизмеримой (и переменной) "частотой". Используя асимптотику функции Бесселя, можно показать, что при $x\to\infty$ решение (14) сходится к (2).

Вычислим N-солитонное решение. С этой целью воспользуемся уравнением (5). Тогда нетрудно получить:

$$\Psi[N] = \Psi - Q_1\Psi\Lambda - \ldots - Q_N\Lambda^N, \qquad (15)$$

[3] Здесь удобно вместо матрицы Ψ_1 использовать матрицу $\Psi_1\sigma_3$ – она также есть решение системы (3).

[4] В этом выражении, как и в (13), (14), выбраны главные ветви соответствующих логарифмов, а также – для однозначности решений – предполагается наличие необходимых разрезов на плоскости параметра $\lambda \in \mathbb{C}$.

причем матричные функции $Q_1, \ldots, Q_N$ определяются из линейной матричной системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\Psi_1 - Q_1\Psi_1\Lambda_1^2 - \ldots - Q_N\Psi_1\Lambda_1^N = 0, \\ &\Psi_2 - Q_1\Psi_2\Lambda_2^2 - \ldots - Q_N\Psi_2\Lambda_2^N = 0, \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Psi_N - Q_1\Psi_N\Lambda_N^2 - \ldots - Q_N\Psi_N\Lambda_1^N = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\Lambda_i = \mathrm{diag}\,(\lambda_i, \bar{\lambda}_i)$, $i = 1, N$, а Ψ_i – решение (3), соответствующее значению $\lambda = \lambda_i$. В то же время, из (8) имеем

$$U_1[N] = U_1 - \sum_{i=1}^{N} L_{ix} = U_1 - Q_{1x}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) легко следуют выражения для N-солитонного решения:

$$\begin{aligned} &S_3[N] = 1 - 2i(\Delta_1/\Delta)_x, \\ &S_+[N] = -2i(\Delta_2/\Delta)_x, \end{aligned} \tag{18}$$

где $S_+[N] = S_1[N] + iS_2[N]$,

$$\Delta = \\ = \begin{vmatrix} \lambda_1\varphi_1 & \lambda_1\chi_1 & \lambda_1^2\varphi_1 & \lambda_1^2\chi_1 & \ldots & \lambda_1^N\varphi_1 & \lambda_1^N\chi_1 \\ -\bar{\lambda}_1\bar{\chi}_1 & \bar{\lambda}_1\bar{\varphi}_1 & -\bar{\lambda}_1^2\bar{\chi}_1 & \bar{\lambda}_1^2\bar{\varphi}_1 & \ldots & -\bar{\lambda}_1^N\bar{\chi}_1 & \bar{\lambda}_1^N\bar{\varphi}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_N\varphi_N & \lambda_N\chi_N & \lambda_N^2\varphi_N & \lambda_N^2\chi_N & \ldots & \lambda_N^N\varphi_N & \lambda_N^N\chi_N \\ -\bar{\lambda}_N\bar{\chi}_N & \bar{\lambda}_N\bar{\varphi}_N & -\bar{\lambda}_N^2\bar{\chi}_N & \bar{\lambda}_N^2\bar{\varphi}_N & \ldots & -\bar{\lambda}_N^N\bar{\chi}_N & \bar{\lambda}_N^N\bar{\varphi}_N \end{vmatrix},$$

а Δ_1 и Δ_2 получаются заменой в определителе Δ первого и второго столбцов на столбцы $(\varphi_1, -\chi_1, \ldots \varphi_N, -\chi_N)^T$ и $(\chi_1, \bar{\varphi}_1, \ldots \chi_N, \bar{\varphi}_N)^T$, соответственно. Доказательство того, что (18) действительно является N-солитонным решением, стандартно [6, 8] (отметим только, что методом обратной задачи получение явного детерминантного представления для этой модели, так же как и для стандартной модели магнетика Гейзенберга – в отсутствие в (1) второго слагаемого – оказывается затруднительным [8]). Аналогично (14), это решение при $x \to \infty$ сходится к затравочному, а при конечных значениях x на этом фоне в спектре возбуждений имеется $N!$ связанных сателлитов с несоизмеримыми "частотами".

В заключение приведем вполне интегрируемое нелинейное уравнение, калибровочно эквивалентное (1) [9]:

$$i\psi_t + (x\psi)_{xx} + 2\psi\left[x\int|\psi|^2dx\right]_x = 0. \tag{19}$$

Этот факт означает, в частности, что к нему применим тот же анализ, что и к (1).

Автор благодарен Г. Г. Варзугину за полезные замечания и А. Б. Борисову за внимание, проявленное к этой работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 00-01-00480).

1. Ю. А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*, М.: Наука, 1987.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982.
3. R. Jackiw and So-Young Pi, hep-th /9911072.
4. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, ТМФ **90**, 175 (1992).
5. А. В. Михайлов, А. И. Яремчук, Письма в ЖЭТФ **36**, 78 (1982).
6. M. A. Salle and V. B. Matveev, *Darboux Transformation and Solitons*, Springer-Verlag, 1991.
7. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1961.
8. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, М.: Наука, 1986.
9. С. П. Бурцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, ТМФ **70**, 373 (1987).