

Осцилляции Доплера–Раби движущегося в резонаторе двухуровневого атома

А. В. Козловский¹⁾

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 2000 г.

После переработки 9 февраля 2001 г.

Рассмотрено взаимодействие равномерно движущегося по классической траектории двухуровневого атома с квантовой модой высокооборотного резонатора. С помощью метода одетых состояний найдена рекуррентная формула для вероятности перехода атома с излучением фотона. Показано, что на зависимость вероятности перехода движущегося атома от положения его в резонаторе, а также на ее величину качественно влияет соотношение между величинами доплеровского сдвига частоты перехода атома и частоты Раби системы атом–поле.

PACS: 32.80.-t, 42.50.Ct

Гамильтониан системы, состоящей из двухуровневого, движущегося по классической траектории, атома и одной моды стоячей волны квантованного электромагнитного поля резонатора [1], мы рассмотрим в следующем виде:

$$H(t) = \hbar\omega_c a^+ a + \frac{\hbar\omega_A}{2} \sigma^z + \hbar g(t) B = \hbar(C_1 + C_2(t)), \quad (1)$$

где оператор взаимодействия поля с атомом в приближении вращающейся волны

$$B = a^+ \sigma^- + \sigma^+ a$$

записан с помощью операторов перехода между верхним $|\uparrow\rangle$ и нижним $|\downarrow\rangle$ состояниями атома: $\sigma^- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$, $\sigma^+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, а оператор инверсии есть $\sigma^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$, a^+ (a) – операторы рождения (уничтожения) поля.

Параметр связи атома, движущегося по траектории $x(t)$, с полем, имеет вид [2–5]

$$g(t) = g_0 \cos(k_C x(t)), \quad g_0 = d \sqrt{\frac{2\pi\omega_A}{\hbar V}}, \quad (2)$$

где $k_C = \omega_C/c$ – волновой вектор моды резонатора, d – дипольный момент перехода двухуровневого атома и V – объем резонатора. В рассмотренном в настоящей работе случае равномерного движения центра масс атома со скоростью v , параметр связи есть

$$g(t) = g_0 \cos(\Omega_D t + \Delta\Omega t), \quad \Omega_D = \frac{v}{c} \omega_A, \quad (3)$$

$$\Delta\Omega = \frac{v}{c} \Delta\omega, \quad (3)$$

¹⁾ e-mail: kozlovsk@sci.lebedev.ru

где Ω_D – доплеровский сдвиг частоты атомного перехода, а $\Delta\omega = \omega_C - \omega_A$ – отстройка частоты перехода атома от частоты моды резонатора.

Представим гамильтониан (1) в виде суммы $\hbar(C_1 + C_2(t))$, где

$$C_1 = \omega_C \left(a^+ a + \frac{\sigma^z}{2} \right), \quad C_2(t) = g(t) B - \frac{\Delta\omega}{2} \sigma^z. \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что операторы C_1 и $C_2(t)$ коммутируют между собой для любого момента времени. Действуя операторами C_1 и $C_2(t)$ на базис векторов состояний $|n, j\rangle \equiv |n\rangle|j\rangle$, где $|n\rangle$ – фоковский базис состояний поля, а $j = \uparrow, \downarrow$, нетрудно видеть, что C_1 диагонален в базисе $|n, j\rangle$ со спектром собственных значений $\omega_C(n \pm 1/2)$, а $C_2(t)$ – недиагонален. Используя базис собственных векторов оператора C_1 , можно найти базис, в котором оба C_1 и $C_2(t)$ были бы диагональны [1]; очевидно, что в этом случае диагонален и $H(t)$. В качестве такого базиса используем линейные комбинации элементов базиса $|n, j\rangle$ вида

$$|+, n\rangle_t = \cos \theta_n(t) |n+1, \downarrow\rangle + \sin \theta_n(t) |n, \uparrow\rangle, \quad (5)$$

$$|-, n\rangle_t = -\sin \theta_n(t) |n+1, \downarrow\rangle + \cos \theta_n(t) |n, \uparrow\rangle.$$

В случае отсутствия в начальный момент времени $t = 0$ поля в резонаторе имеем $n = 0$ и $|+, 0\rangle_t, |-, 0\rangle_t$.

Действуя оператором C_1 на элементы такого базиса одетых состояний, получаем

$$C_1 |\pm, n\rangle_t = \omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right) |\pm, n\rangle_t, \quad (6)$$

то есть состояния $|\pm, 0\rangle_t$ – вырожденные собственные состояния этого оператора. Подействуем $C_2(t)$ на $|\pm, 0\rangle_t$ и потребуем, чтобы в этом базисе $C_2(t)$ был диагонален, то есть

$$C_2(t)|\pm, n\rangle_t = \Omega_{\pm, n}^{(R)}(t)|\pm, n\rangle_t; \quad (7)$$

тогда из (5) находим для частоты Раби

$$\Omega_{+, n}^{(R)}(t) = -\Omega_{-, n}^{(R)}(t) = \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + g^2(t)(n+1)}, \quad (8)$$

$$\theta_n(t) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2g(t)}{\Delta\omega} \sqrt{n+1}\right).$$

В базисе одетых состояний, диагонализующем гамильтониан $H(t)$, имеем

$$H(t)|\pm, n\rangle_t = \left(\frac{\hbar\omega_C}{2} + \hbar\Omega_{\pm, n}^{(R)}(t)\right)|\pm, n\rangle_t \equiv \hbar\Omega_{\pm, n}(t)|\pm, n\rangle_t. \quad (9)$$

Из (5) и свойства ортонормированности базиса одетых состояний для фиксированного момента времени находим соотношение между базисами $|\pm, n\rangle_t$ и $|n, j\rangle$:

$$\begin{aligned} |n+1, \downarrow\rangle &= \cos\theta_n(t)|+, n\rangle_t - \sin\theta_n(t)|-, n\rangle_t, \\ |n, \uparrow\rangle &= \sin\theta_n(t)|+, n\rangle_t + \cos\theta_n(t)|-, n\rangle_t. \end{aligned} \quad (10)$$

Элементы полученного таким образом параметрически зависящего от времени базиса одетых состояний не ортонормированы для разных моментов времени, что необходимо иметь в виду при дальнейших расчетах. Соотношения между элементами базиса одетых состояний для разных моментов времени имеют вид $\forall t_1 \neq t_2$:

$$\begin{aligned} |+, n\rangle_{t_1} &= \cos(\theta_n(t_2) - \theta_n(t_1))|+, n\rangle_{t_2} - \\ &\quad - \sin(\theta_n(t_2) - \theta_n(t_1))|-, n\rangle_{t_2}, \\ |-, n\rangle_{t_1} &= \sin(\theta_n(t_2) - \theta_n(t_1))|+, n\rangle_{t_2} + \\ &\quad + \cos(\theta_n(t_2) - \theta_n(t_1))|-, n\rangle_{t_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

В шредингеровском представлении временная эволюция атома, взаимодействующего с полем, описывается пропагатором (оператором эволюции) $U(t, t_0)$ так, что вектор состояния в момент времени t имеет вид

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (12)$$

Разобьем конечный интервал времени $[t_0, t]$ на большое число $M \gg 1$ малых отрезков Δt и будем предполагать, что внутри каждого из этих отрезков зависимостью гамильтониана системы от времени можно пренебречь. Тогда временная эволюция системы характеризуется пропагатором

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_M)\Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_{M-1})\Delta t} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1)\Delta t} |\psi(t_0)\rangle, \quad \Delta t = \frac{t}{M}. \quad (13)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда атом в начальный момент времени $t_0 = 0$ находится в возбужденном состоянии, а поле находится в вакуумном состоянии, то есть $|\psi(t_0 = 0)\rangle = |0, \uparrow\rangle$.

Используя (12), (13), (8) и применяя (9), (10), мы приходим к следующей рекуррентной формуле для вектора состояния системы в конечный момент времени:

$$|\psi(t = t_M)\rangle = A_{+, M}|+, 0\rangle_{t=t_M} + A_{-, M}|-, 0\rangle_{t=t_M}, \quad (14)$$

где величины $A_{\pm, M}$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} A_{+, t_j} &= e^{-i\Omega_{+, n}(t_j)\Delta t} (\cos(\Delta\theta_{0, j})A_{+, t_{j-1}} + \\ &\quad + \sin(\Delta\theta_{0, j})A_{-, t_{j-1}}), \\ A_{-, t_j} &= e^{-i\Omega_{-, n}(t_j)\Delta t} (-\sin(\Delta\theta_{0, j})A_{+, t_{j-1}} + \\ &\quad + \cos(\Delta\theta_{0, j})A_{-, t_{j-1}}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta\theta_{0, j} \equiv \theta_0(t_j) - \theta_0(t_{j-1}),$$

для любого $0 < j \leq M$ и

$$\begin{aligned} A_{+, t_1} &= \sin(\theta_0(\Delta t))e^{-i\Omega_{+, 0}(\Delta t)\Delta t}, \\ A_{-, t_1} &= \cos(\theta_0(\Delta t))e^{-i\Omega_{-, 0}(\Delta t)\Delta t}. \end{aligned} \quad (16)$$

Вероятность перехода атома в нижнее состояние с излучением фотона в моду резонатора тогда равна

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle 1 \downarrow | \psi(t) \rangle|^2 = \langle a^+(t) a(t) \rangle = \\ &= |\cos(\theta_0(t))A_{+, t} - \sin(\theta_0(t))A_{-, t}|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что в расчетах с помощью (17) в формулах (15) и (16) без изменения результата можно заменить $\Omega_{+, 0}(t) \rightarrow \pm\Omega_0^{(R)}(t)$.

Использование нами предположения о классичности движения атома в резонаторе накладывает известные ограничения на скорость и массу атома. В расчетах с помощью полученных выше формул мы будем предполагать, что длина волны де Бройля $\lambda = h/mv$, где m – масса атома, много меньше длины волны поля моды резонатора $\lambda = 2\pi/k_C$, то есть масса атома и/или скорость движения центра масс велика. Предположение о равномерности движения атома, то есть пренебрежение импульсом отдачи при излучении фотона, также требует малости энергии связи $\hbar g_0$ по сравнению с кинетической энергией движения центра масс атома $mv^2/2$. Детальный анализ применимости классического приближения в задаче взаимодействия движущегося в резонаторе атома приведен, например, в [3].

Мы предполагаем также, что резонатор обладает высокой добротностью, достаточной, чтобы время взаимодействия атома с полем было меньше, чем γ^{-1} , где γ – скорость диссипации поля вследствие потерь на зеркалах. Рассматриваемые нами условия соответствуют микромазерной конфигурации из [6–12], где авторами была использована обычная модель Джейнса – Каммингса.

Как известно, вероятность излучения фотона атомом, покоящимся в электромагнитном вакууме, осциллирует во времени с вакуумной частотой Раби

$$P(t) = \frac{4g_0^2}{\Delta\omega^2 + 4g_0^2} \sin^2(\Omega_0^{(R)}t).$$

Если отстройка частоты перехода атома от частоты моды поля $\Delta\omega \ll g_0$ для вероятность перехода, равной, в рассматриваемом нами случае, среднему числу фотонов в резонаторе, можно получить, в согласии с результатами работы [2], простое выражение

$$P(t) = \langle a^+(t)a(t) \rangle = \sin^2 \left[\frac{g_0}{\Omega_D} \sin(\Omega_D t) \right]. \quad (18)$$

Как показывают расчеты по формулам (16), (17), в случае движущегося атома временная зависимость вероятности перехода принципиально зависит от соотношений величин скорости движения центра масс, константы связи, а также отстройки частоты перехода от частоты моды резонатора. В зависимости от соотношений между этими величинами $\xi = \Omega_R/\Omega_D$, $\Omega_R = \sqrt{g_0^2 + (\Delta\omega/2)^2}$, осцилляции Раби могут отсутствовать во временной зависимости вероятности излучения. При $\xi \ll 1$ даже при больших значениях константы связи и малых отстройках, вероятность излучения атомом фотона, и выхода его из резонатора в нижнем состоянии, может быть мала (см. рис.1). При этом частота осцилляции вероятности перехода

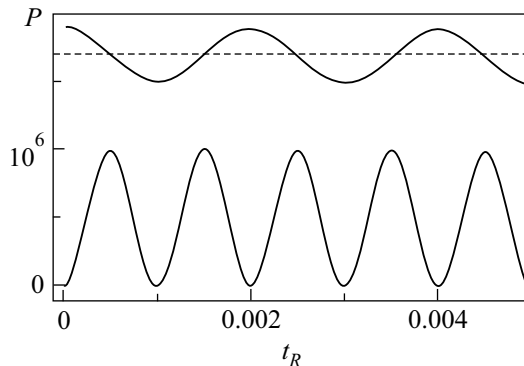


Рис.1. Зависимость вероятности перехода возбужденного атома в нижнее состояние с излучением фотона P от безразмерного времени $t_R = \Omega_R t/\pi$, $\Omega_R = \sqrt{g_0^2 + (\Delta\omega/2)^2}$ при $\Delta\omega \ll g_0$, $\xi = \Omega_R/\Omega_D = 10^{-3}$. Вверху изображена зависимость $\cos(k_c x(t_R))$

соответствует $1/\xi$ -й гармонике частоты Раби, а величина вероятности убывает как ξ^2 . Как следует из формулы (18), при $\xi \ll 1$ вероятность перехода есть $g_0^2/\Omega_D^2 \sin^2(\Omega_D t)$, то есть частота осцилляций опре-

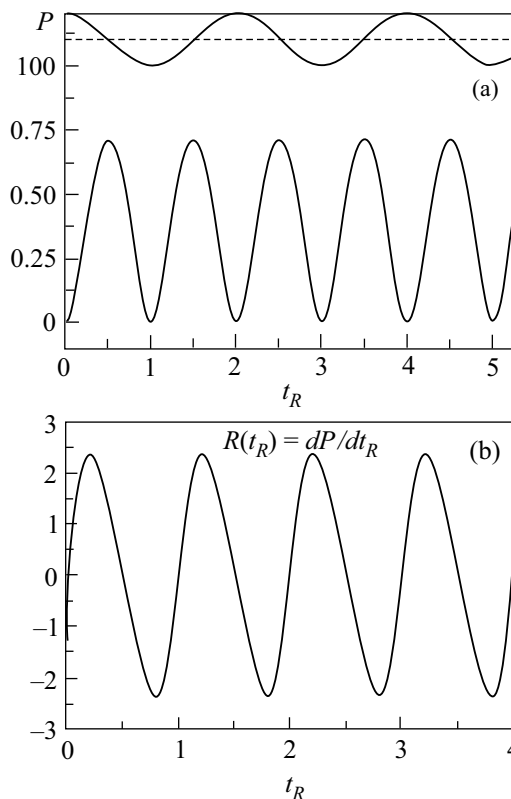


Рис.2. (а) То же, что на рис.1 в условиях резонанса Доплера–Раби $\xi = \Omega_R/\Omega_D = 1$. (б) Скорость перехода $R(t_R) = dP(t_R)/dt_R$

деляется величиной Доплеровского сдвига частоты атомного перехода.

Условием присутствия осцилляций вероятности, подобных осцилляциям Раби, является доплеровский резонанс, когда $\xi = 1$ (рис.2), в этом случае $P \leq \sin^2(1)$, согласно формуле (18).

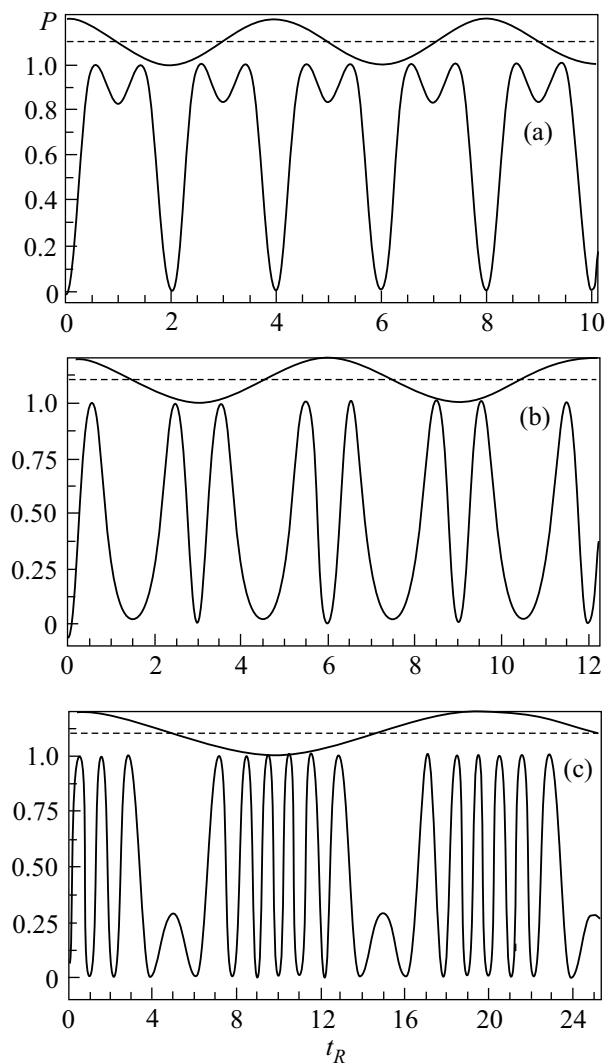


Рис.3. То же, что на рис.1 при $\xi = 2$ (a), 3 (b) и 10 (c)

Если $\xi > 1$, то есть если доплеровский сдвиг меньше частоты Раби, величина вероятности перехода в максимумах, как и в случае покоящегося атома, равна единице. Как видно из рис.3а, при $\xi = 2$ осцилляций с частотой Раби нет, однако с ростом ξ осцилляции Раби восстанавливаются вблизи пучностей поля (рис.3б,с). Как и следовало ожидать, при $\xi \gg 1$ обычные осцилляции Раби имеют место, но, при конечной скорости атома, только вблизи пучностей поля в резонаторе.

В настоящее время в теории микромазера [6–9] используется модель Джейнса – Каммингса для покоящегося атома. Сравнение теории с экспериментом, проведенное в [8–13], показывает, что предсказания такой теории не всегда согласуются с экспериментом. Например, в [12], где было проведено экспериментальное исследование статистики числа фотонов излучения микромазера, для значений частоты перехода атома $\omega_A = 21.5$ ГГц, длины резонатора $L = 2.4$ см, константы связи $g_0 = 10$ кГц и времени пролета атома через резонатор $L/v = 50$ мкс отмечено качественное расхождение теории и эксперимента. В то же время, изменяя параметры микромазера, при уменьшении времени взаимодействия атома с полем до величины $L/v = 35$ мкс и увеличении константы связи до $g_0 \approx 44$ кГц согласие с теорией достигается. Расчет по формуле (17), учитывающий влияние движения центра масс атома на его взаимодействие с полем, показывает, что в последнем случае состояние системы близко к резонансу Доплера – Раби ($\xi \approx 1$), и вероятность перехода изменяется по закону, близкому к обычным раби-осцилляциям (см. рис.2) для покоящегося атома, тогда как для других экспериментальных условий, указанных выше, соотношение между частотой Раби и величиной доплеровского сдвига значительно меньше: $\xi \approx 0.3$ и реализуется, резко отличающаяся от резонансной ($\xi = 1$), закономерность обмена энергией между атомом и полем, подобная изображенной на рис.1 при $\xi \ll 1$.

Как показали наши расчеты, учет эффектов, связанных с движением атома в резонаторе, необходим в теории микромазера, как в случае резонатора с плоскопараллельными зеркалами, так и в случае конфокального резонатора со сферическими зеркалами [14, 15], а также для схем микролазера, в которых поток возбужденных атомов пропускается через резонатор [16].

1. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
2. P. Meystre, Opt. Commun. **90**, 41 (1992).
3. W. Ren, J. D. Cresser, and H. J. Carmichael, Phys. Rev. **A46**, 7162 (1992).
4. M. Wilkens and P. Meystre, Opt. Commun. **94**, 66 (1992).
5. W. Ren and H. J. Carmichael, Phys. Rev. **A51**, 752 (1995).
6. P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, Phys. Rev. **A34**, 3077 (1986).
7. L. A. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. **A36**, 740 (1987).
8. D. Meschede, W. Walther, and G. Müller, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).

9. H.-J. Briegel, B.-G. Englert, and M. O. Scully, *Phys. Rev. A* **54**, 3603 (1996).
10. M. O. Scully, G. M. Meyer, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4144 (1996).
11. G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 353 (1987).
12. G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2783 (1990).
13. M. Weidinger, B. T. H. Varcoe, R. Heerlein, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3795 (1999).
14. M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
15. M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler et al., *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3339 (1992).
16. G. T. Forster, S. L. Mielke, and L. A. Orozco, *Phys. Rev. A* **61**, 053821 (2000).