

Формирование конических острий на поверхности жидкого металла в электрическом поле

Н. М. Зубарев¹⁾

Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 14 марта 2001 г.

После переработки 16 апреля 2001 г.

Исследована динамика формирования сингулярного профиля поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле. Выявлены автомодельные решения уравнений электрогидродинамики, ответственные за фундаментальный процесс зарождения на поверхности конических острий с углом раствора, близким к углу конуса Тейлора 98.6° . Установлен характер поведения физических величин (напряженности поля, скорости жидкости, кривизны поверхности) вблизи особенности.

PACS: 03.40.Gc, 47.20.Ma, 47.65.+a

Известно [1, 2], что плоская граница жидкого металла неустойчива в достаточно сильном электрическом поле. Развитие неустойчивости приводит к появлению особенностей – конических острий, усиление поля на вершине которых обеспечивает условия для инициации эмиссионных процессов [3–6]. Проблема описания их формирования является центральной в электрогидродинамике проводящих жидкостей со свободной поверхностью; интерес к ней в значительной мере обусловлен широким практическим применением жидкометаллических источников заряженных частиц. Существенный прогресс в этой области связан с работой Тейлора [7], в которой было показано, что для конуса с углом раствора 98.6° электростатическое давление P_E на поверхности зависит от расстояния до его оси как r^{-1} и, следовательно, может уравновешиваться поверхностным давлением $P_S \sim r^{-1}$. Баланс сил нарушается на вершине конуса, вследствие чего решение Тейлора не может считаться точным решением задачи о равновесной конфигурации заряженной поверхности проводящей жидкости, представляя собой лишь вероятную асимптотику при $r \rightarrow \infty$. Вместе с тем, как оказалось, решение Тейлора прекрасно описывает экспериментально наблюдаемую форму поверхности жидкости к моменту формирования особенности – в работах [3–6] отмечалась близость угла раствора зарождающихся конических образований с углом конуса Тейлора.

В чем причина подобного совпадения? Можно предположить, что существует механизм формирования за конечное время конических острий с углом раствора 98.6° , не имеющий прямого отношения

к статической модели Тейлора. Высокая повторяемость экспериментальных результатов и слабая зависимость поведения жидкости на завершающих стадиях неустойчивости от геометрии задачи наводят на мысль, что поведение жидкости вблизи особенности имеет автомодельный характер.

Проверим справедливость этой гипотезы. Рассмотрим потенциальное движение идеальной проводящей жидкости, занимающей область, ограниченную свободной поверхностью $z = \eta(x, y, t)$. Будем считать, что вектор напряженности внешнего электрического поля направлен по оси z , а его величина есть E . Потенциал скорости жидкости Φ и потенциал электрического поля φ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

со следующими условиями на границе и на бесконечности:

$$\begin{aligned} \Phi_t + \frac{|\nabla \Phi|^2}{2} &= \frac{|\nabla \varphi|^2}{8\pi\rho} + \frac{\alpha}{\rho} \nabla_\perp \cdot \frac{\nabla_\perp \eta}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp \eta)^2}}, \\ z &= \eta(x, y, t), \\ \eta_t &= \Phi_z - \nabla_\perp \eta \cdot \nabla_\perp \Phi, \quad z = \eta(x, y, t), \\ \varphi &= 0, \quad z = \eta(x, y, t), \\ |\nabla \Phi| &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \\ \varphi &\rightarrow -Ez, \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность среды.

Нас интересует динамика формирования сингулярного профиля поверхности проводящей жидкости. Естественно предположить, что электрическое поле вблизи острия значительно превосходит внеш-

¹⁾e-mail: nick@ami.uran.ru

нее, $|\nabla\varphi| \gg E$. В таком случае эволюция границы целиком определяется собственным полем, затухающим при удалении от особенности, что дает основание использовать условие

$$|\nabla\varphi| \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \quad (2)$$

вместо условия однородности поля (1). Это согласуется с предположением об универсальности поведения жидкости при формировании сингулярного профиля поверхности, поскольку позволяет анализировать движение жидкости вблизи особой точки в отрыве от конкретной геометрии задачи. Более подробно применимость условия (2) мы обсудим позже, когда будут установлены некоторые закономерности динамики проводящей жидкости вблизи особенности. Отметим лишь, что в пользу наличия универсального механизма формирования конических острий свидетельствует, в частности, возможность зарождения вторичных конусов Тейлора на уже существующих [4]. Из этого примера ясно, что жидкость на стадии коллапса “забывает” граничные условия на бесконечности.

Рассмотрим наиболее важный случай возмущений поверхности с осевой симметрией. Учитывая, что при помощи замен

$$\varphi \rightarrow \varphi 4\pi\alpha E^{-1}, \quad \Phi \rightarrow \Phi 2\pi^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\alpha E^{-1}, \quad \eta \rightarrow \eta 4\pi\alpha E^{-2}, \\ r \rightarrow r 4\pi\alpha E^{-2}, \quad z \rightarrow z 4\pi\alpha E^{-2}, \quad t \rightarrow t 8\pi^{\frac{3}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}\alpha E^{-3},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, уравнения движения приводятся к безразмерному виду, не содержащему каких-либо физических характеристик, получим:

$$\Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + \Phi_{zz} = 0, \quad z < \eta(r, t), \quad (3)$$

$$\varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + \varphi_{zz} = 0, \quad z > \eta(r, t), \quad (4)$$

$$\Phi_t + \frac{\Phi_r^2 + \Phi_z^2}{2} = \frac{\varphi_r^2 + \varphi_z^2}{2} + \\ + \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_r^2}} \left(\frac{\eta_{rr}}{1 + \eta_r^2} + \frac{\eta_r}{r} \right), \quad (5) \\ z = \eta(r, t),$$

$$\eta_t = \Phi_z - \eta_r \Phi_r, \quad z = \eta(r, t), \quad (6)$$

$$\varphi = 0, \quad z = \eta(r, t), \quad (7)$$

$$\Phi_r^2 + \Phi_z^2 \rightarrow 0, \quad \varphi_r^2 + \varphi_z^2 \rightarrow 0, \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$\Phi_r = 0, \quad \varphi_r = 0, \quad \eta_r = 0, \quad r = 0. \quad (9)$$

Эти уравнения допускают единственную автомодельную подстановку:

$$\Phi(x, y, z, t) = \tilde{\Phi}(\tilde{r}, \tilde{z})\tau^{1/3}, \quad (10)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(\tilde{r}, \tilde{z})\tau^{1/3}, \quad (11)$$

$$\eta(x, y, t) = \tilde{\eta}(\tilde{r})\tau^{2/3}, \quad (12)$$

$$r = \tilde{r}\tau^{2/3}, \quad (13)$$

$$z = \tilde{z}\tau^{2/3}, \quad (14)$$

где $\tau = t_c - t$, а t_c – момент коллапса. Ее существование связано с тем, что уравнения (3)–(9) инвариантны относительно растяжений

$$\Phi \rightarrow \Phi c, \quad \varphi \rightarrow \varphi c, \quad \eta \rightarrow \eta c^2,$$

$$r \rightarrow r c^2, \quad z \rightarrow z c^2, \quad t \rightarrow t c^3,$$

то есть, по сути, с соображениями размерности (здесь c – произвольная постоянная). Отметим, что исходные уравнения электрогидродинамики, в которых используется условие (1), не допускают введения каких-либо автомодельных переменных.

Подставляя выражения (10)–(14) в уравнения (3)–(9), находим, что функции $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\eta}$ подчиняются следующей системе уравнений в частных производных:

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{r}\tilde{r}} + \tilde{r}^{-1}\tilde{\Phi}_{\tilde{r}} + \tilde{\Phi}_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0, \quad \tilde{z} < \tilde{\eta}(\tilde{r}), \quad (15)$$

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{r}\tilde{r}} + \tilde{r}^{-1}\tilde{\varphi}_{\tilde{r}} + \tilde{\varphi}_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0, \quad \tilde{z} > \tilde{\eta}(\tilde{r}), \quad (16)$$

$$\frac{2\tilde{\Phi}_{\tilde{r}}\tilde{r} + 2\tilde{\Phi}_{\tilde{z}}\tilde{\eta} - \tilde{\Phi}}{3} + \frac{\tilde{\Phi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\Phi}_{\tilde{z}}^2}{2} = \\ = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\varphi}_{\tilde{z}}^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\eta}_{\tilde{r}}^2}} \left(\frac{\tilde{\eta}_{\tilde{r}\tilde{r}}}{1 + \tilde{\eta}_{\tilde{r}}^2} + \frac{\tilde{\eta}_{\tilde{r}}}{\tilde{r}} \right), \quad (17) \\ \tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r}),$$

$$2\tilde{\eta}_{\tilde{r}}\tilde{r} - 2\tilde{\eta} = 3\tilde{\Phi}_{\tilde{z}} - 3\tilde{\eta}_{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_{\tilde{r}}, \quad \tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r}), \quad (18)$$

$$\tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r}), \quad (19)$$

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\Phi}_{\tilde{z}}^2 \rightarrow 0, \quad \tilde{\varphi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\varphi}_{\tilde{z}}^2 \rightarrow 0, \quad \tilde{r}^2 + \tilde{z}^2 \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$\bar{\Phi}_{\tilde{r}} = 0, \quad \bar{\varphi}_{\tilde{r}} = 0, \quad \bar{\eta}_{\tilde{r}} = 0, \quad \bar{r} = 0. \quad (21)$$

Для автомодельных решений (10)–(14) профиль поверхности жидкости сначала формируется на периферии и затем распространяется к центру $r = z = 0$ (масштаб уменьшается как $\tau^{2/3}$). Это означает, что за формирование конических острий в момент $t = t_c$ ответственны решения системы уравнений (15)–(21), обладающие конической асимптотикой для формы поверхности. В таком случае наличие для этих уравнений асимптотических решений, для которых $\bar{\eta} \sim \bar{r}$ при $\bar{r} \rightarrow \infty$, является необходимым условием справедливости нашего предположения об автомодельной природе конических образований.

Рассмотрение уравнений (15)–(21) в пределе $R = \sqrt{\bar{r}^2 + \bar{z}^2} \rightarrow \infty$ показало, что они допускают асимптотическое решение вида

$$\bar{\varphi}(\bar{r}, \bar{z}) = p^{-1} [2R(s_0 - s)]^{1/2} P_{1/2}(\cos \theta), \quad (22)$$

$$\bar{\Phi}(\bar{r}, \bar{z}) = sR^{-1}, \quad (23)$$

$$\bar{\eta}(\bar{r}) = -s_0 \bar{r}; \quad (24)$$

$$P_{1/2}(\cos \theta_0) = 0,$$

$$p = [dP_{1/2}(\cos \theta)/d\theta]_{\theta=\theta_0},$$

$$s_0 = -\text{ctg} \theta_0,$$

где $\theta = \arctg(\bar{r}/\bar{z})$ – полярное расстояние в сферических координатах, $P_{1/2}$ – функция Лежандра порядка $1/2$, а s – постоянная, удовлетворяющая неравенству $0 < s < s_0$. Это решение задает коническую поверхность с углом раствора $2\pi - 2\theta_0$, что соответствует приблизительно 98.6° , то есть углу конуса Тейлора. В соответствии с уравнением (23) движение жидкости обладает сферической симметрией – она распространяется к точке стока $R = 0$ по касательной к поверхности (24). Поскольку автомодельное решение при $\tau \rightarrow 0$ переходит в свою асимптотику, то в момент t_c формируется коническое острие с тейлоровским углом, а выражения (22)–(24) задают точное аналитическое решение задачи. При этом напряженность электрического поля на вершине нарастает как $\tau^{-1/3}$, скорость роста острия – как $\tau^{-1/3}$, а его кривизна – как $\tau^{-2/3}$, то есть все эти величины обращаются в бесконечность за конечное время. На значительном удалении от особенности напряженность поля не изменяется, а скорость движения жидкости линейно уменьшается со временем, обращаясь в нуль к моменту $t = t_c$. Последнее позволяет качественно объяснить для жидкометаллических источников

ионов механизм перехода к стационарному режиму работы после инициации на острие процессов полевого испарения ионов (стационарные модели эмиттера развивались в работах [8, 9]).

Подобный анализ имеет силу только при условии, что решения системы уравнений в частных производных (15)–(21) с асимптотикой (22)–(24) существуют. Доказательством существования может служить возможность построения асимптотического разложения решений при $R \rightarrow \infty$, в котором выражения (22)–(24) задавали бы основной порядок. Будем искать разложение в виде

$$\bar{\varphi}(\bar{r}, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial^{3n}}{\partial \bar{z}^{3n}} [R^{1/2} P_{1/2}(\cos \theta)], \quad (25)$$

$$\bar{\Phi}(\bar{r}, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{3n}}{\partial \bar{z}^{3n}} [R^{-1}], \quad (26)$$

$$\bar{\eta}(\bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{r}^{1-3n}, \quad (27)$$

где мы учли, что производная произвольного порядка по \bar{z} гармонической функции также является гармонической функцией. Коэффициенты нулевого порядка определяются из (22)–(24):

$$a_0 = p^{-1} [2(s_0 - s)]^{1/2}, \quad b_0 = s, \quad c_0 = s_0.$$

В первом порядке разложения, как оказалось, поверхность остается конической:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = -\frac{s^2(1 + s_0^2)^{3/2}}{18s_0(3 - 2s_0^2)}, \quad c_1 = 0.$$

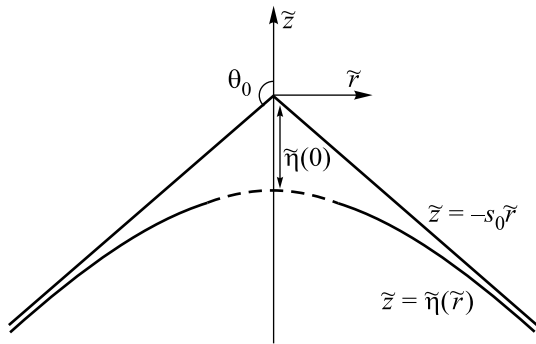
Поправка к выражению (24) для формы поверхности появляется лишь в следующем порядке – из кинематического граничного условия (18) находим, что

$$c_2 = -\frac{s^2(4s_0^2 - 1)}{8s_0^2(1 + s_0^2)^2(3 - 2s_0^2)}.$$

Коэффициенты a_2 и b_2 можно определить из уравнения (19) и, соответственно, уравнения (17), где следует использовать линейный порядок теории возмущений по малому отклонению поверхности от конической. В свою очередь, коэффициент c_3 находится из (18), где следует учитывать уже квадратичные нелинейности, и т.д. Таким образом, коэффициенты разложения однозначно определяются через коэффициенты нулевого порядка, то есть через параметр задачи s , что подтверждает существование решений

уравнений движения с необходимыми нам асимптотиками. Отметим, что если положить $s = 0$ и, следовательно, $\Phi = 0$, то уравнения (15)–(21) совпадут с рассмотренными Тейлором в задаче о равновесной конфигурации заряженной поверхности жидкого металла. Однако в этом случае асимптотическое разложение в форме (25)–(27) построить не удастся.

Далее, для того, чтобы решения, представленные разложениями (25)–(27), соответствовали наблюдаемой в экспериментах картине, необходимо выполнение условия: $\tilde{\eta} < -s_0\tilde{r}$, то есть поверхность жидкости должна располагаться под асимптотическим конусом (см. рисунок). В противном случае скорость



Схематически изображена поверхность проводящей жидкости $\tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r})$, соответствующая автоматическим решениям уравнений движения

движения границы была бы направлена вниз, против направления оси z . Проверим, выполняется ли это условие в пределе больших r . Из полученных выше разложений для формы поверхности следует, что направление отклонения формы поверхности от конической определяется знаком коэффициента c_2 . В нашем случае $c_2 < 0$ (при углах раствора конуса, меньших 78.5° и больших 126.9° , было бы $c_2 > 0$), так что амплитуда возмущения поверхности должна нарастать. Действительно, эволюция границы жидкости на удалении от особенности в основном порядке разложения по малой величине τ задается выражением

$$\eta(r, t) = -s_0 r - |c_2| \tau^4 r^{-5},$$

откуда видно, что жидкость при формировании конического острия движется вверх, как и требуется из соображений физической осмысленности решений.

Рассмотрим теперь геометрию поверхности при малых \tilde{r} , где построенный нами ряд (27) расходится. Для того чтобы функция $\tilde{\eta}$ удовлетворяла условию (21), поверхность у вершины конуса должна “скругляться”, см. рисунок. Оценим расстояние от вершины конуса до поверхности жидкости $|\tilde{\eta}(0)|$. До-

множая кинематическое граничное условие (18) на $2\pi\tilde{r}/3$ и затем интегрируя его по \tilde{r} , находим после несложных преобразований:

$$2V = \int_S \partial_n \tilde{\Phi} dS,$$

где S обозначает поверхность жидкости $\tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r})$, V – объем области, ограниченной сверху конической поверхностью $\tilde{z} = -s_0\tilde{r}$ и снизу – поверхностью S , а ∂_n – производную в направлении нормали к S . Интеграл в правой части этого выражения задает поток скорости жидкости через ее поверхность. Поскольку функция $\tilde{\Phi}$ – гармоническая, то поток векторного поля $\nabla\tilde{\Phi}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это позволяет определить поток через поверхность S по асимптотике потенциала скорости при $R \rightarrow \infty$. Учитывая, что жидкость на бесконечности втекает в телесный угол, равный $2\pi(1 + \cos\theta_0)$, получим при помощи (23):

$$\int_S \partial_n \tilde{\Phi} dS = 2\pi s(1 + \cos\theta_0),$$

и, следовательно, $V = \pi s(1 + \cos\theta_0)$. Заметим, что объем области, ограниченной конической поверхностью $\tilde{z} = -s_0\tilde{r}$ и плоскостью $\tilde{z} = -h$ (круглый прямой конус высотой h), будет равен V при

$$h = h(s) = [3ss_0^2(1 + \cos\theta_0)]^{1/3}.$$

Понятно, что при фиксированном объеме V , а также при выполнении для любых \tilde{r} условий $\tilde{\eta}(\tilde{r}) + s_0\tilde{r} < 0$ и $\tilde{\eta}_{\tilde{r}}(\tilde{r}) \leq 0$ величина $|\tilde{\eta}(0)|$ не может превышать высоты этого конуса. То есть выполняется неравенство:

$$|\tilde{\eta}(0)| \leq h(s),$$

связывающее характерный пространственный масштаб в области малых R с параметром асимптотики s . Так как наибольшее возможное значение $h(s)$ соответствует максимальному допустимому значению постоянной s , равному s_0 , то справедлива также следующая оценка:

$$|\tilde{\eta}(0)| \leq h(s_0) = s_0(3 + 3\cos\theta_0)^{1/3},$$

не содержащая свободного параметра s .

Вернемся к вопросу о применимости приближения (3)–(9) исходных уравнений движения. Как указывалось, возможность использования условия (2) вместо (1) ограничена требованием малости напряженности внешнего электрического поля по сравнению с собственным полем острия. Это означает, что должно выполняться неравенство $\varphi_r^2 + \varphi_z^2 \gg 1$. После

перехода к автомодельным переменным оно перепи-
сывается в виде

$$\tilde{\varphi}_r^2 + \tilde{\varphi}_z^2 \gg \tau^{2/3}.$$

Ясно, что при достаточно малых τ (то есть непосредственно перед моментом коллапса) вблизи особенности данное условие выполняется естественным образом. Так как при малых τ можно считать $|\nabla\varphi| \sim \sim (r^2 + z^2)^{-1/4}$, то в достаточно малой окрестности особой точки будет $|\nabla\varphi| \gg 1$. В таком случае существуют такие числа R_0 и τ_0 , что при $0 \leq r^2 + z^2 < R_0^2$ и $0 \leq \tau < \tau_0$ модель (3)–(9) действительно применима для описания сильно нелинейных стадий развития электрогидродинамической неустойчивости свободной поверхности проводящей жидкости во внешнем электрическом поле. При $r^2 + z^2 > R_0^2$ роль нелинейных процессов сравнительно мала; появляется необходимость использования условия однородности поля на бесконечности (1), а также соответствующих условий в пределе $r \rightarrow \infty$, в частности, условия пространственной локализации возмущения поверхности: $\eta \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. В этой области проблема описания эволюции границы жидкости решается в рамках теории возмущений по углу наклона поверхности — подобная процедура реализовывалась, например, в работах [10,11].

В заключение обсудим вопрос о возможности формирования на поверхности более сильных особенностей — точек заострения (возврата). Известно [12], что для тонких острий поле при приближении к вершине нарастает в основном как r^{-1} , а электростатическое давление P_E , следовательно, как r^{-2} . Поскольку для поверхностного давления $P_S \sim r^{-1}$, то вблизи особенности $P_E \gg P_S$, и капиллярными эффектами можно пренебречь. В работе [10] было показано, что в отсутствие поверхностного натяжения формироваться будут слабые корневые особенности вида $\eta \sim r^{3/2}$, для которых кривизна оказывается бесконечной, а сама поверхность остается гладкой. Таким образом, исходя из предположения о допустимости появления точек заострения, мы получаем противоречие. Все это дает определенные основания полагать, что именно конические особенности будут являться сингулярными решениями общего положения для уравнений электрогидродинамики, а поведение заряженной поверхности жидкого металла при формировании острий будет описываться автомодельными решениями (10)–(21).

Отметим также, что результаты настоящей работы могут быть обобщены на случай диэлектрических жидкостей в электрическом поле, где возможно формирование конических острий с углом раствора, зависящим от коэффициента диэлектрической проницаемости [13]. Кроме того, развиваемый подход может быть применен для описания эволюции заостряющихся за конечное время углублений в заряженной поверхности жидкого гелия (см., например, экспериментальную работу [14]). В предыдущей работе [15], посвященной построению точных аналитических решений уравнений движения жидкого гелия в случае малости капиллярных эффектов, нами было доказано, что для плоской геометрии задачи на границе появляются точки возврата, $\eta \sim |x|^{2/3}$. Вопрос о типе особенностей при осевой симметрии до сих пор не рассматривался.

Автор благодарен А. Б. Борисову и Е. А. Кузнецову за ряд ценных замечаний, а также В. Г. Суворову за плодотворные дискуссии. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 00-02-17428) и INTAS (проект # 99-1068).

1. L. Tonks, Phys. Rev. **48**, 562 (1935).
2. Я. И. Френкель, ЖЭТФ **6**, 347 (1936).
3. А. В. Батраков, С. А. Попов, Д. И. Проскуровский, Письма в ЖТФ **19**, 66 (1993).
4. W. Driesel, Ch. Dietzsch, H. Niedrig, and B. Praprotnic, Ultramicroscopy **57**, 45 (1995).
5. W. Driesel, Ch. Dietzsch, and R. Mühle, J. Vac. Sci. Technol. **B14**, 3367 (1996).
6. А. В. Батраков, Диссертация на соискание степени канд. физ.-мат. наук, ИСЭ СО РАН, Томск, 1997.
7. G. Taylor, Proc. R. Soc. **A280**, 383 (1964).
8. D. R. Kingham and L. W. Swanson, Appl. Phys. **A34**, 123 (1984).
9. R. G. Forbes and N. N. Ljepojevic, Surface Science **246**, 113 (1991).
10. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **114**, 2043 (1998).
11. Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, ЖТФ **71**, 21 (2001).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982.
13. A. Ramos and A. Castellanos, Phys. Lett. **A184**, 268 (1994).
14. А. П. Володин, М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, Письма в ЖЭТФ **26**, 707 (1977).
15. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **71**, 534 (2000).