Письма в ЖЭТФ, том 73, вып. 10, с. 635 – 639 © 2001 г. 25 мая

Модель вигнеровской жидкости

Э. Г. Батыев[1)]

Институт физики полупроводников Сибирского отд. РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 6 марта 2001 г.
После переработки 19 апреля 2001 г.

Рассматривается двумерная система носителей заряда малой плотности, то есть с сильным кулоновским взаимодействием, которое может привести к появлению коротковолновой мягкой моды (предвестник кристаллизации). В такой системе имеются элементарные возбуждения двух типов: ферми-возбуждения и бозе-возбуждения со щелью в спектре (типа ротонов в сверхтекучем гелии). Принимается модель – ферми-жидкость плюс мягкая мода, и взаимодействие различных возбуждений друг с другом описывается феноменологически, в духе теории ферми-жидкости Ландау. Получены уравнения, решение которых дает зависимость эффективной массы ферми-возбуждений и щели в спектре бозе-возбуждений от температуры (первая уменьшается, а вторая увеличивается с ростом температуры).

PACS: 71.27.+a , 71.30.+h

В экспериментах [1] было обнаружено необычное поведение проводимости двумерных систем в зависимости от температуры и концентрации носителей заряда. В дальнейшем подобные результаты были получены и в других экспериментах (см., например, [2 – 7], а также обзор [8]). Предлагались различные объяснения полученных зависимостей (см., например, [8 – 10]). Одно из последних было предложено в работе [11], в которой делается упор на корреляционные эффекты. Суть в том, что в системе с кулоновским взаимодействием при достаточно малой концентрации становятся существенными корреляции в расположении носителей, которые в конце концов приводят к образованию вигнеровского кристалла. Жидкость, предшествующую такому кристаллу, называют иногда вигнеровской жидкостью. В такой жидкости возможно появление так называемой "мягкой моды", которой соответствуют бозе-частицы с малой энергией. Раньше [11] обсуждалось в простейшей постановке, как такие возбуждения могут повлиять на проводимость системы. Спрашивается, какова роль взаимодействия этих частиц друг с другом и с ферми-возбуждениями, учитывая то обстоятельство, что это взаимодействие не может быть описано, например, по теории возмущений. Можно пытаться описать его феноменологически, в духе теории ферми-жидкости Ландау. Это и делается в настоящей работе.

Основное предположение – в системе имеется мягкая мода при конечном значении импульса. Такое возможно при различного рода структурных превращениях, например, когда в кристалле происходит удвоение периода. Простейший пример – антиферромагнетик в сильном магнитном поле [12] вблизи точки неустойчивости полностью поляризованного состояния. Такое же может происходить и при кристаллизации, если система испытывает фазовый переход, близкий к переходу второго рода (см. [13]). Сопоставление рассматриваемой системы и гелия-3 [11] было нужно для того, чтобы пояснить, что можно ожидать в нашем случае (различные возможности для гелия-3 обсуждались в [13, 14]). Единственное же, что необходимо для дальнейшего – это предположение о мягкой моде, которая бывает не только в гелии-3.

В работе [15] предполагается и используется более полная аналогия двумерной электронной системы с гелием-3, но без явного введения мягкой моды. Фактически это совершенно другой подход, и получаемые в [15] результаты относятся к другим характеристикам, чем в настоящей работе.

Предлагаемая модель – это ферми-жидкость плюс мягкая мода. Предполагается независящая от спина мягкая мода (как в [13]), хотя в принципе возможен и другой вариант (как в [14]). Но по мере уменьшения концентрации возрастает взаимная локализация электронов из-за кулоновского взаимодействия (как в вигнеровском кристалле) и соответственно уменьшаются интегралы перекрытия и обменное взаимодействие, так что эффекты, связанные со спинами, должны отходить на второй план. Поэтому и делается упомянутое выше предположение.

Модель. В теории ферми-жидкости Ландау задается изменение энергии системы δE_L при изменении функции распределения $\delta n_{\mathbf{p}}$ в таком виде:

[1)]e-mail: batyev@isp.nsc.ru

$$\delta E_L = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p},\ \mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\mathbf{p}'}, \qquad (1)$$

где $\epsilon_{\mathbf{p}}$ – энергия квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}$, V – объем (площадь) системы, $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ – функция взаимодействия квазичастиц фермиевского типа (далее их будем называть фермионами). В однородном случае это годится и для системы заряженных частиц, тогда как в неоднородном случае необходимо учесть также соответствующие кулоновские вклады. Здесь и далее подразумевается суммирование по спиновым индексам (наряду с суммированием по импульсам).

Теперь необходимо учесть все, что связано с мягкой модой. Прежде всего, это энергия соответствующих бозе-частиц, которую запишем в операторном виде:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{q}} \Omega_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{+} b_{\mathbf{q}}, \quad \Omega_{\mathbf{q}}^2 = \Omega_0^2 + v_0^2 (q - q_0)^2, \qquad (2)$$

где $\Omega_{\mathbf{q}}$ – энергия бозона (при абсолютном нуле температур), $b_{\mathbf{q}}^{+}$ ($b_{\mathbf{q}}$) – оператор рождения (уничтожения) бозона с импульсом $\mathbf{q}$.

Взаимодействие бозонов с фермионами запишем в виде:

$$H_1 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\ \mathbf{q}} \delta n_{\mathbf{p}} U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) B_{\mathbf{q}} B_{-\mathbf{q}}, \quad B_{\mathbf{q}} = \frac{b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^{+}}{\sqrt{\Omega_{\mathbf{q}}}}, \quad (3)$$

где $B_{\mathbf{q}}$ есть (с точностью до несущественного множителя) координата соответствующего осциллятора. Здесь при записи энергии взаимодействия естественно было использовать именно координату осциллятора, а не степень возбуждения осциллятора (число бозонов).

Гамильтониан (3) приводит, в частности, к изменению фермионного спектра $\delta \epsilon_{\mathbf{p}}$ с температурой:

$$\delta \epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \langle B_{\mathbf{q}} B_{-\mathbf{q}} \rangle, \qquad (4)$$

где символ $\langle ... \rangle$ означает усреднение по состоянию системы (например, по равновесному состоянию при конечной температуре). С той же точностью надо учесть и поправку δf к функции взаимодействия фермионов:

$$\delta f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} g(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}) \langle B_{\mathbf{q}} B_{-\mathbf{q}} \rangle. \qquad (5)$$

Энергию взаимодействия бозонов друг с другом представим в виде, который полностью аналогичен (1), только содержит координаты осцилляторов, как и в (3):

$$\langle H_2 \rangle = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \langle B_{\mathbf{q}} B_{-\mathbf{q}} \rangle \lambda(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \langle B_{\mathbf{q}'} B_{-\mathbf{q}'} \rangle.$$

Или то же самое в операторном виде, который удобен при отыскании спектра бозона:

$$H_2 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} B_{\mathbf{q}} B_{-\mathbf{q}} \lambda(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \langle B_{\mathbf{q}'} B_{-\mathbf{q}'} \rangle -$$

$$- \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \langle B_{\mathbf{q}} B_{-\mathbf{q}} \rangle \lambda(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \langle B_{\mathbf{q}'} B_{-\mathbf{q}'} \rangle. \qquad (6)$$

Недостаток всего вышеизложенного очевиден: ниоткуда не следует, что оба типа возбуждений относятся к одной и той же системе носителей. Понятно, в чем это могло бы проявиться: если имеется движение системы со скоростью $\mathbf{u}$, то спектр бозона должен измениться известным образом:

$$\Omega_{\mathbf{q}} \to \Omega_{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\mathbf{u}.$$

Введем дополнительное взаимодействие между двумя типами квазичастиц так, чтобы при абсолютном нуле получился требуемый результат:

$$H_3 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \delta n_{\mathbf{p}} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{q})}{mn} b_{\mathbf{q}}^{+} b_{\mathbf{q}}, \quad n = \frac{p_F^2}{2\pi}, \qquad (7)$$

где n и m – концентрация и масса носителей. Нетрудно убедиться, рассматривая вместе (2) и (7), что при этом получается правильный результат. Однако в общем случае этого не достаточно. Дело в том, что естественно ожидать изменения бозонного спектра в зависимости от полного импульса системы, а не только импульса фермионов, как это следует из (7). Поэтому необходимо сделать соответствующую добавку, чтобы это получилось, именно:

$$H_4 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}', \mathbf{q}} \langle b_{\mathbf{q}'}^{+} b_{\mathbf{q}'} \rangle \frac{(\mathbf{q}'\mathbf{q})}{mn} b_{\mathbf{q}}^{+} b_{\mathbf{q}} -$$

$$- \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}', \mathbf{q}} \langle b_{\mathbf{q}'}^{+} b_{\mathbf{q}'} \rangle \frac{(\mathbf{q}'\mathbf{q})}{mn} \langle b_{\mathbf{q}}^{+} b_{\mathbf{q}} \rangle. \qquad (8)$$

Здесь использована операторная запись, как и в (6). Подчеркнем, что (7), (8) вместе с (1) приводят именно к той зависимости энергии системы от импульса, которая должна быть в общем случае: достаточно рассмотреть неравновесные исходные функции распределения фермионов и бозонов в отсутствие диссипации импульса системы, допуская возможность установления теплового равновесия внутри системы.

О параметрах, определяющих исходный бозонный спектр (2). Импульс q_0 можно оценить следующим образом: для заданной концентрации носителей надо рассмотреть, например, треугольную решетку и найти вектор обратной решетки, величина которого и соответствует q_0. Теперь о величине Ω_0. Введем характерное время для фермионов $t_F \sim 1/\epsilon_F(0)$, где $\epsilon_F(0) \sim v_F(0)p_F$ (t_F порядка времени пролета среднего расстояния между носителями, p_F – фермиевский импульс, $v_F(0)$, $\epsilon_F(0)$ – фермиевские скорость и энергия при нулевой температуре). На временах $t \ll t_F$ система ведет себя скорее как аморфное твердое тело (с кристаллическим ближним порядком), чем как жидкость, а как жидкость она ведет себя на больших временах $t > t_F$ (подобные вопросы обсуждаются, например, в [15]). Поэтому можно утверждать, что если есть мягкая мода именно в жидкости, то ее характерная частота должна быть достаточно мала: $\Omega_0 < \epsilon_F(0)$, потому что на больших частотах система не может проявить себя как жидкость. Это уже малая величина по сравнению с взаимодействием, но можно предполагать даже более сильное неравенство, и тогда можно говорить о мягкой моде и в фермиевских масштабах. Что касается v_0, то, по-видимому, $v_0 \sim v_F(0)$. Итак, собирая все вместе, имеем:

$$q_0 \approx \nu 2p_F, \quad \nu = \left(\pi/\sqrt{3}\right)^{1/2}; \qquad v_0 \sim v_F(0); \quad \Omega_0 \ll \epsilon_F(0). \tag{9}$$

Приведенные соотношения (1) – (8) составляют содержание модели. В данной работе будут рассматриваться только равновесные свойства, поэтому выражения (7) и (8) не понадобятся.

Свойства. При конечных температурах (или при изменении концентрации носителей) бозонный спектр перенормируется из-за взаимодействий (3) и (6), и для его определения надо решить задачу с гамильтонианом

$$H_0 + H_1 + H_2 \to H = \\ = \sum_{\mathbf{q}}\left(\Omega_{\mathbf{q}} b^+_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} + \frac{\Delta^2_{\mathbf{q}}}{4\,\Omega_{\mathbf{q}}}(b_{\mathbf{q}} + b^+_{-\mathbf{q}})(b_{-\mathbf{q}} + b^+_{\mathbf{q}})\right), \tag{10}$$

$$\Delta^2_{\mathbf{q}} = \frac{4}{V}\sum_{\mathbf{p}} U(\mathbf{p},\mathbf{q})\delta n_{\mathbf{p}} + \frac{4}{V}\sum_{\mathbf{k}} \lambda(\mathbf{q},\mathbf{k})\langle B_{\mathbf{k}} B_{-\mathbf{k}}\rangle. \tag{11}$$

В (10) опущено несущественное постоянное слагаемое, а в (11) не учтена добавка, связанная с (5), которая заведомо мала при низких температурах, так как содержит квадрат изменения фермионной функции распределения.

Гамильтониан (10) диагонализуется при помощи (u,v)-преобразования Боголюбова:

$$b_{\mathbf{q}} = u_{\mathbf{q}}\beta_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{q}}\beta^+_{-\mathbf{q}}, \quad u^2_{\mathbf{q}} - v^2_{\mathbf{q}} = 1, \tag{12}$$

где $\beta^+_{\mathbf{q}}$, $\beta_{\mathbf{q}}$ – операторы квазичастицы (перенормированный бозон). Элементарное вычисление дает

$$H = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}\beta^+_{\mathbf{q}}\beta_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}}\Big(\omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{q}}\Big), \qquad \omega^2_{\mathbf{q}} = \Omega^2_{\mathbf{q}} + \Delta^2_{\mathbf{q}}. \tag{13}$$

Для коэффициентов (u,v)-преобразования имеем следующие выражения:

$$u^2_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega^2_{\mathbf{q}} + \Delta^2_{\mathbf{q}}/2}{\omega_{\mathbf{q}}\Omega_{\mathbf{q}}} + 1\right), \quad u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} = \frac{-\Delta^2_{\mathbf{q}}}{4\omega_{\mathbf{q}}\Omega_{\mathbf{q}}}. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться, что выражения (7) и (8) через квазичастичные операторы записываются аналогичным образом, то есть с заменой $b^+_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} \to \beta^+_{\mathbf{q}}\beta_{\mathbf{q}}$.

Выясним, что дает уравнение (11). Начнем с нулевой температуры – при этом оказывается возможным при помощи простых соображений установить связь между различными параметрами модели. В дальнейшем нам понадобится разложение по малым отклонениям усредненного по углу взаимодействия (см. (3), (11)):

$$\overline{U(\mathbf{p},\mathbf{q})} \approx U_0 + U_1\frac{q - q_0}{q_0} + U_2\frac{p - p_F}{p_F}. \tag{15}$$

При изменении концентрации δn носителей должен меняться и бозонный спектр:

$$\Delta^2_{\mathbf{q}} = 4\ \delta n\overline{U(\mathbf{p},\mathbf{q})}_{p=p_F} \approx 4\delta n\left(U_0 + U_1\frac{q - q_0}{q_0}\right) \equiv \\ \equiv \frac{\delta n}{n}\Big[\Omega_1^2 - 2v_0^2 q_1(q - q_0)\Big]. \tag{16}$$

Это выражение переписано так, чтобы было явно видно, что при возрастании концентрации носителей увеличиваются и щель в спектре, и импульс в минимуме ($q_1 > 0$), как можно ожидать из физических соображений:

$$\Omega_0^2 \to \Omega_0^2 + \frac{\delta n}{n}\ \Omega_1^2, \quad q_0 \to q_0 + \frac{\delta n}{n} q_1.$$

Согласно (9), имеем $q_1 = \nu p_F$. Понятно, что должно быть $\Omega_1 \sim \Omega_0$. Это означает, что мала нулевая гармоника величины U (если справедливо сильное неравенство для Ω_0, как в (9)). Но производные по импульсам нулевой гармоники, то есть U_1 и U_2, не малы и для них можно написать:

$$U_2 \approx -U_1 = \frac{\nu^2 p_F^2 v_0^2}{n}. \tag{17}$$

Последнее равенство видно из (16) и последующих замечаний, а первое следует из отмеченной выше малости U_0 и пропорциональности q_0 и p_F: в противном случае при относительно небольшом изменении концентрации малая величина U_0 изменялась бы существенно, а это может быть только при изменении концентрации на сравнимую величину.

Теперь обратимся к температурным поправкам. Бозонный спектр изменяется согласно (11). При вычислении среднего, входящего в это уравнение, используем квазичастичные операторы (см. (12), (14)) и удерживаем только вклад, зависящий от температуры (который обращается в нуль при $T \to 0$). Нас интересуют значения $q \approx k \approx q_0$, так что в результат войдет вместо функции $\lambda(\mathbf{q},\mathbf{k})$ ее среднее по углу значение $\overline{\lambda}$ при указанных значениях импульсов, и уравнение (11) принимает вид

$$\Delta_{\mathbf{q}}^2 = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{p}} \overline{U(\mathbf{p},\mathbf{q})}\left(\operatorname{sign}\xi_p - \tanh\frac{\xi_p}{2T}\right) + \\ + \frac{4\overline{\lambda}}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left[\frac{2N_{\mathbf{k}}+1}{\omega_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\Omega_{\mathbf{k}}}\right],$$
$$N_{\mathbf{k}} = \left[\exp(\omega_{\mathbf{k}}/T) - 1\right]^{-1},$$

где $\xi_p = v_F\ (p - p_F)$ – энергия фермиона, отсчитанная от фермиевской энергии (v_F – фермиевская скорость). Фермионный спектр также изменяется, и из (4) с использованием (15) получим для эффективной массы m^* через эффективную массу при нулевой температуре m_0^* следующее выражение:

$$\frac{1}{m_0^*} = \frac{1}{m^*} - \frac{U_2}{p_F^2 V}\sum_{\mathbf{q}}\left(\frac{2N_{\mathbf{q}}+1}{\omega_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{\Omega_{\mathbf{q}}}\right).$$

Для этих же целей можно использовать также функцию взаимодействия фермионов с добавкой (5), как это делается в теории ферми-жидкости, что дает некоторую связь между функциями, входящими в (4) и (5).

Переходя от сумм к интегрированиям по энергиям соответствующих квазичастиц (с учетом (15)), получим из написанных выше выражений следующие:

$$\Delta^2 = \left(\frac{m^*}{m_0^*}\right)^2 \alpha T^2 + \omega_1^2 F(\omega_0), \quad \frac{m_0^*}{m^*} = 1 + \gamma F(\omega_0), \tag{18}$$

$$F(\omega_0) \equiv 2\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}\frac{1}{\exp(\omega/T) - 1} - \ln(\omega_0/\Omega_0),$$

где опущен аргумент $\Delta_{\mathbf{q}}$, так как здесь эта величина не зависит от импульса, и введены обозначения:

$$\alpha = \frac{16\ U_2\ (m_0^*)^2}{\pi p_F^2} I,\ I = \int_0^{\infty} dx\ x\left(1 - \tanh(x)\right) \approx 0.411,$$

$$\gamma = \frac{U_2 m_0^* q_0}{\pi p_F^2 v_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\Omega_0^2 + \Delta^2}, \quad \omega_1^2 = 4q_0\overline{\lambda}/(\pi v_0)$$

(ω_1 – величина размерности энергии, предполагается $\overline{\lambda} > 0$, как обычно для ангармонизма четвертого порядка). Между положительными безразмерными постоянными γ и α имеется соотношение, которое с учетом (17) запишется следующим образом:

$$\frac{\alpha}{\gamma^2} = \frac{2I}{\nu^4}, \quad \gamma = 4\nu^3 v_0/v_F(0). \tag{19}$$

Нашей главной задачей, помимо формулировки модели, было получение уравнений (18), определяющих температурную зависимость спектров элементарных возбуждений. Как оказывается, эффективная масса фермиона уменьшается, а щель в бозонном спектре увеличивается с ростом температуры. Это видно в простом предельном случае. Пусть $\omega_0/T \ll \ll 1$, что возможно при температурах $T \gg \Omega_0$ и достаточно малой величине ω_1. Тогда функция $F(\omega_0)$ приближенно вычисляется, и из уравнений (18) получим:

$$m^*/m_0^* \approx \omega_0/\gamma\pi T, \quad \omega_0 \approx \left(\pi\omega_1^2 T\right)^{1/3}.$$

Вопрос о проводимости требует отдельного рассмотрения. Но уже можно сказать следующее. Из-за температурной зависимости спектров, во-первых, рассеяние фермиона на примесях, зависящее от эффективной массы, будет меняться с температурой; во-вторых, вклад бозонов в сопротивление также будет изменяться (по сравнению с тем, что было получено раньше [11])). Необходимо было понять, как учесть эти эффекты, и в этом состоит смысл предложенной модели.

Благодарю А. В. Чаплика и М. В. Энтина за полезное обсуждение. Работа поддержана, в частности, Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 00-15-96800) и Государственной программой Российской Федерации "Физика твердотельных наноструктур".

---

1. S. V. Kravchenko et al., Phys. Rev. **B50**, 8039 (1994); **B51**, 7038 (1995); Phys. Rev. Lett. **77**, 4938 (1996).
2. Y. Hanein, U. Meirav, D. Shahar et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 1288 (1998).
3. S. J. Papadakis and M. Shayegan, Phys. Rev. **B57**, R15068 (1998).
4. Jongsoo Yoon, C. C. Li, D. C. Tsui, and M. Shayegan, Phys. Rev. Lett. **84**, 4421 (2000).
5. S. C. Dultz and H. W. Jiang, Phys. Rev. Lett. **84**, 4689 (2000).

6. V. Senz, T. Ihn, T. Heinzel et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 4357 (2000).
7. L. Moldovan, S. Melinte, V. Bayot et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 4369 (2000).
8. E. Abrahams, S. V. Kravchenko, and M. P. Sarachik, Rev. Mod. Phys. **73**, 251 (2001).
9. В. М. Пудалов, Письма в ЖЭТФ **66**, 168 (1997).
10. B. L. Altshuler and D. L. Maslov, Phys. Rev. Lett. **82**, 145 (1999).
11. Э. Г. Батыев, Письма в ЖЭТФ **72**, 727 (2000).
12. Э. Г. Батыев, Л. С. Брагинский, ЖЭТФ **87**, 1361 (1984).
13. Э. Г. Батыев, ЖЭТФ **70**, 578 (1976).
14. А. М. Дюгаев, ЖЭТФ **70**, 2390 (1976).
15. B. Spivak, cond-mat/0005328.