

Подавление шума динамической системы внешним шумом и периодическим сигналом

С. Л. Гинзбург, М. А. Пустовойт, О. В. Геращенко¹⁾

Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова РАН, 188350 Гатчина, Ленинградская обл., Россия

Поступила в редакцию 12 апреля 2001 г.

После переработки 3 мая 2001 г.

В простой стохастической системе, передемпфированном крамерсовском осцилляторе с двумя источниками шума – внутренним белым и внешним цветным, обнаружено и исследовано явление подавления шумовой составляющей спектра выходного сигнала системы при увеличении интенсивности внешнего шума либо внешнего периодического сигнала.

PACS: 02.50.-г, 05.40.+j, 05.45.+b, 84.30.-г

1. В последние годы пристальное внимание исследователей привлекает проблема конструктивной роли шума в природе. Множество экспериментальных фактов из самых различных областей науки подтверждают точку зрения, согласно которой влияние шума, являющегося постоянным спутником всех реальных систем, далеко не всегда ограничивается деструктивными и термодинамическими эффектами. В частности, при прохождении через нелинейные системы полезных сигналов шум оптимальной (ненулевой) интенсивности, тепловой либо приложенный извне, может улучшать передачу сигнала. Это явление получило название стохастического резонанса. Результаты, достигнутые в его изучении, обобщены в ряде обзоров [1, 2].

Основная масса теоретических работ по проблеме стохастического резонанса посвящена исследованию прохождения сигнала через системы с одним источником шума, обычно белого; явление идентифицируется как появление максимума зависимости отношения сигнал-шум от интенсивности шума. Некоторые авторы, однако, исследовали системы с двумя источниками шума, вначале без периодического сигнала, а затем и с таковым [3, 4]. Такая постановка задачи физически естественна и плодотворна, поскольку в любой реальной системе имеется внутренний тепловой шум, интенсивность которого определяется температурой. Управляющий же шум, так же как и сигнал, подается на систему извне. Однако до сих пор в этих задачах изучалась зависимость прохождения сигнала от интенсивности только внутреннего шума. С другой стороны, во многих случаях, особенно в области биологии, температура (а значит, и мощность

внутреннего шума) фиксирована внутри узкого интервала. Зато амплитуду внешнего шума и сигнала можно менять в широких пределах. Именно такой подход к задаче мы применили в настоящей работе; варьируемыми параметрами у нас являются отношения амплитуд управляющего шума и сигнала к интенсивности внутреннего шума.

Мы изучаем динамическую двумерную систему с периодическим прямоугольным сигналом и двумя источниками шума – белым (внутренним) и цветным (внешним). Выбор именно прямоугольного сигнала позволяет решить задачу при больших амплитудах сигнала, не ограничиваясь теорией возмущений.

Изучаемой характеристикой у нас служит шумовой фон, который мы определяем как спектральную плотность выходного сигнала системы на нулевой частоте $S(0)$.

Ниже мы сообщаем о следующих новых результатах: *подавлении шумового фона сигналом и подавлении шумового фона внешним шумом*. Из этого следует, что при увеличении внешнего шума и сигнала *отношение сигнал-шум (SNR) возрастает*. Заметим, что подавление шумового фона стохастической *нединамической* системы внешним шумом было недавно обнаружено в [5].

Рассмотрим уравнение передемпфированного крамерсовского осциллятора с двумя источниками шума:

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - bx^3 + F + z(t) + \sigma\xi(t) + AR(t), \\ z(t) &= \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n s_k(t), \quad s_k(t) = \pm 1, \\ \langle s_k(t) s_l(t') \rangle &= \delta_{kl} \exp(-\gamma|t-t'|), \\ \langle z(t) z(t') \rangle &= \Delta^2 \exp(-\gamma|t-t'|), \\ \langle \xi(t) \xi(t') \rangle &= \delta(t-t'), \end{aligned}$$

¹⁾e-mail: gerashch@pnpi.spb.ru

$$R(t+T) = R(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq T/2, \\ -1, & T/2 < t \leq T. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь, как видно, $\xi(t)$ – белый шум, $z(t)$ – цветной шум, представляющий собой сумму n дихотомических шумов ($n = 1$ соответствует обычному дихотомическому, или телеграфному, шуму, а $n = \infty$ – гауссову), $a, b, F, \sigma, \Delta, A$ – константы.

В уравнении (1) очень важна иерархия характерных времен. Обозначая время корреляции (реально-го) белого шума через τ и предполагая, что $a \sim b$, примем в нашей задаче следующую иерархию времен:

$$T \gg \gamma^{-1}, \omega_0^{-1} \gg a^{-1} \gg \tau \rightarrow 0, \quad (2)$$

где ω_0 – характерная частота переключений под действием белого шума (см. (6)).

Перейдем от (1) к модели двух состояний. Удобно определить энергию $U_0(x)$:

$$U_0(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4, \quad (3)$$

$$\delta U_0 = U_0(0) - U_0(\pm x_0) = \frac{a^2}{4b}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

где $\pm x_0$ – устойчивые фиксированные точки уравнения (1) при $F = \Delta = A = \sigma = 0$.

Если выполнены следующие условия:

$$\delta U_0 \gg \sigma^2, \quad \delta U_0 \gg \Delta \cdot x_0, \quad \delta U_0 \gg F \cdot x_0, \quad (4)$$

$$\frac{(\Delta \cdot x_0)^2}{\sigma^2 \delta U_0}, \quad \frac{(\Delta \cdot x_0)^2}{\sigma^2 \delta U_0} \ll 1,$$

то $x(t)$ можно аппроксимировать при помощи дихотомического сигнала:

$$x(t) = x_0 d(t), \quad d(t) = \pm 1. \quad (5)$$

Таким образом, мы имеем модель двух состояний. Зависящие от времени вероятности перехода между этими двумя состояниями определяются в кramerсовском приближении:

$$\alpha(t) = w_{-1 \rightarrow 1} = w_0 \exp [p + qn^{-1/2}Q(t) + vR(t)],$$

$$\beta(t) = w_{1 \rightarrow -1} = w_0 \exp [-p - qn^{-1/2}Q(t) - vR(t)],$$

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n s_k(t), \quad (6)$$

$$p = \frac{2x_0 F}{\sigma^2}, \quad q = \frac{2x_0 \Delta}{\sigma^2},$$

$$v = \frac{2x_0 A}{\sigma^2}, \quad w_0 = \frac{a}{\pi\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{a^2}{2b\sigma^2} \right).$$

При выполнении условий (2) можно написать управляющее уравнение для плотности распределения нестационарного процесса $d(t)$:

$$\frac{dP(1,t)}{dt} = \alpha(t)P(-1,t) - \beta(t)P(1,t), \quad (7)$$

$$\frac{dP(-1,t)}{dt} = \beta(t)P(1,t) - \alpha(t)P(-1,t).$$

Если внешний шум $z(t)$ – быстрый ($\gamma \gg \omega_0$), то в (7) можно усреднить $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ по этому быстрому шуму. Тогда получим нестационарный случайный процесс, управляющее уравнение для которого имеет вид

$$\frac{dP(1,t)}{dt} = \alpha_1(t)P(-1,t) - \beta_1(t)P(1,t),$$

$$\frac{dP(-1,t)}{dt} = \beta_1(t)P(1,t) - \alpha_1(t)P(-1,t), \quad (8)$$

$$\alpha_1(t) = \langle \alpha(t) \rangle_z = w_0 e^{p+vR(t)} \cosh^n(qn^{-1/2}),$$

$$\beta_1(t) = \langle \beta(t) \rangle_z = w_0 e^{-p-vR(t)} \cosh^n(qn^{-1/2}).$$

Легко показать, что решения уравнений (7) и (8) для быстрого шума ($\gamma \rightarrow \infty$) совпадают. Действительно, пусть имеется некоторая случайная величина $a(t)$ со средним $\langle a(t) \rangle = a_1$ и корреляционной функцией $K_a(t) = \langle (a(t) - a_1)(a(0) - a_1) \rangle = a_2^2 \exp(-\gamma|t|)$. При $\gamma \rightarrow \infty$ имеем $K_a(t) \rightarrow 2a_2^2 \delta(t)/\gamma \rightarrow 0$, то есть $a(t)$ ведет себя как неслучайная величина a_1 . Напомним, что белый шум $\xi(t)$ дает ненулевой вклад потому, что его коррелятор $\langle \xi(t)\xi(0) \rangle = \frac{\gamma}{2} \exp(-\gamma|t|) \rightarrow \delta(t)$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Разница между $a(t)$ и $\xi(t)$ состоит в том, что дисперсия $a_2^2 = \text{const}$, а $\langle \xi^2 \rangle = \gamma/2 \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow \infty$.

Возвращаясь к $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, мы видим, что, например, при $n = 1$ и $v = 0$ дисперсия $\langle (\alpha(t) - \alpha_1)^2 \rangle = w_0^2 \exp(2p) \sinh^2 q$ и не растет при $\gamma \rightarrow \infty$, то есть для быстрого шума $\alpha(t)$ можно заменить на $\alpha_1(t)$. Подробно эта проблема рассмотрена, например, в [6], раздел 3.2.

Учитывая иерархию времен (2), уравнение (8) можно решить в адиабатическом приближении. В результате выражение для неприводимой корреляционной функции, усредненной по фазе периодического сигнала R на больших временах $t \sim T$ имеет вид

$$\begin{aligned}
K(t) &= \langle x(t)x(0) \rangle_{z,R} - \langle x(t) \rangle_{z,R} \langle x(0) \rangle_{z,R} = \\
&= B\varphi_0(t) + C\delta(t), \\
\varphi_0(t) &= \langle R(t)R(0) \rangle_R = \\
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp(-i(2k+1)\Omega t), \quad (9) \\
B &= \frac{x_0^2}{4} \{ \tanh(p+v) - \tanh(p-v) \}^2, \\
C &= \frac{x_0^2}{2w_0 \cosh^n(qn^{-1/2})} \times \\
&\times \{ \cosh^{-3}(p+v) + \cosh^{-3}(p-v) \}.
\end{aligned}$$

Спектральная плотность $S(\omega)$ получается фурье-преобразованием $K(t)$:

$$S(\omega) = \frac{8}{\pi} B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta[\omega - (2k+1)\Omega]}{(2k+1)^2} + C. \quad (10)$$

Отсюда видно, что шумовой фон $S(0) = C$. Отношение сигнал-шум, которое мы определяем как отношение интенсивности первой гармоники к фону, есть $SNR = 8B/\pi C$.

Выпишем частные случаи при $p = 0$ для телеграфного и гауссова шумов:

$$\begin{aligned}
S(0) &= \begin{cases} \frac{x_0^2}{w_0 \cosh^3 v \cosh q}, & n = 1, \\ \frac{x_0^2}{w_0 \cosh^3 v} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), & n = \infty, \end{cases} \\
SNR &= \begin{cases} \frac{8w_0}{\pi} \sinh^2 v \cdot \cosh v \cdot \cosh q, & n = 1, \\ \frac{8w_0}{\pi} \sinh^2 v \cdot \cosh v \cdot \exp\left(\frac{q^2}{2}\right), & n = \infty. \end{cases} \quad (11)
\end{aligned}$$

Из (11) видно, что при возрастании внешнего шума q и/или сигнала v шумовой фон падает, и за счет этого растет SNR , поскольку периодическая составляющая выходного сигнала достигает насыщения.

Формулы (9)–(11) получены для быстрого шума ($\gamma \gg w_0$). Интересно было бы выяснить поведение шумового фона $S(0)$ при произвольных соотношениях между γ и w_0 . Здесь мы сделаем это на простом примере точно решаемой задачи. При $p = v = 0$, $n = 1$ задача сводится к модели четырех состояний [3, 4]. В этой модели рассматривается стационарный двумер-

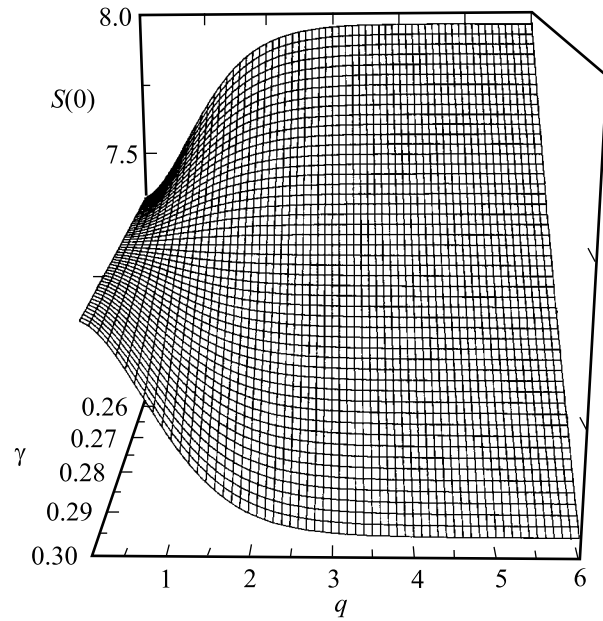


Рис.1. Шумовой фон как функция амплитуды и частоты переключений внешнего шума (зависимость (14) при $\sigma^2 = 1$, $a = b = 1$, $w_0 \approx 0.13$). При увеличении γ происходит переход от усиления шумового фона к его подавлению внешним шумом (кроссовер при $\gamma \approx 2w_0$ согласно формуле (14))

ный марковский процесс $\{d(t), s(t)\}$. Для него имеется следующее управляющее уравнение (см. [4]):

$$\begin{aligned}
\frac{dP(d, s, t)}{dt} &= w(-d, s)P(-d, s, t) - \\
&- w(d, s)P(d, s, t) + \frac{\gamma}{2}[P(d, -s, t) - P(d, s, t)], \\
w(d, s) &= w_0 e^{-qs d}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Решая это уравнение и вычисляя неприводимые корреляторы, получим:

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{x_0^2}{(\alpha_0 + \beta_0)^2 - \gamma^2} \left\{ (4\alpha_0\beta_0 - \gamma^2) \times \right. \\
&\times \exp[-(\alpha_0 + \beta_0)|t|] + (\alpha_0 - \beta_0)^2 \exp(-\gamma|t|) \left. \right\}, \\
S(\omega) &= \frac{x_0^2}{(\alpha_0 + \beta_0)^2 - \gamma^2} \left\{ (4\alpha_0\beta_0 - \gamma^2) \times \right. \\
&\times \frac{2(\alpha_0 + \beta_0)}{\omega^2 + (\alpha_0 + \beta_0)^2} + (\alpha_0 - \beta_0)^2 \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \left. \right\}, \\
\alpha_0 &= w_0 e^q, \quad \beta_0 = w_0 e^{-q}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Отсюда легко получается выражение для $S(0)$ при произвольных соотношениях между γ и w_0 :

$$S(0) = \frac{x_0^2}{w_0 \cosh q} \left\{ 1 + \frac{2w_0}{\gamma} \frac{\sinh^2 q}{\cosh q + \frac{\gamma}{2w_0}} \right\},$$

$$S(0) = \begin{cases} \frac{2x_0^2}{\gamma} \tanh^2 q + \frac{x_0^2}{w_0} \cosh^{-3} q, & \gamma \ll w_0, \\ \frac{x_0^2}{w_0 \cosh q}, & \gamma \gg w_0. \end{cases} \quad (14)$$

Последняя формула в (14) совпадает с первой формулой (11) при $\nu = 0$. Таким образом, мы видим, что при $\gamma \ll w_0$ фон $S(0)$ растет с увеличением q , а в противоположном случае – падает. На рис.1 приведен график зависимости $S(0)$ от q и γ , где четко виден переход от усиления к подавлению $S(0)$ внешним шумом с увеличением частоты переключений последнего.

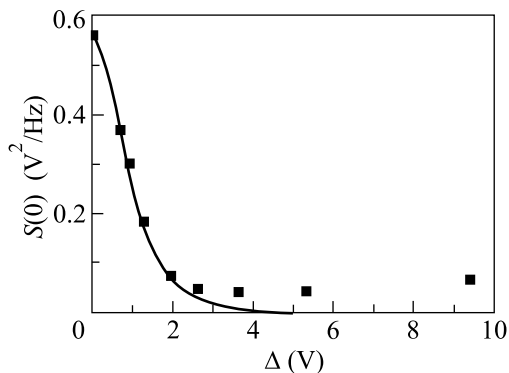


Рис.2. Шумовой фон $S(0)$ как функция амплитуды дихотомического шума при $\gamma/2\pi \approx 350$ Гц. Частота переключений при воздействии только белого шума $w_0/2\pi \approx 10$ Гц. Сплошная линия представляет зависимость (14) при $\gamma \gg w_0$

2. Мы провели аналоговое моделирование эффекта подавления шума на электронной модели двухуровневой нелинейной системы: передемпфированном осцилляторе с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой, аналогичном использованному в работах [7, 8]. Подаваемое на схему напряжение представляло собой сумму физического белого гауссова шума с частотой отсечки около 30 кГц, дихотомического шума с амплитудой $0 \leq \Delta \leq 10$ В и частотой отсечки $0 \leq \gamma/2\pi \leq 2000$ Гц и переменного прямоугольного сигнала с частотой $\Omega/2\pi = 1$ Гц и амплитудой A . Характерная частота нелинейной системы $1/2\pi RC \approx 1400$ Гц. Изменяя интенсивность гауссова шума, мы могли изменять

характерную частоту переключений между двумя состояниями в системе.

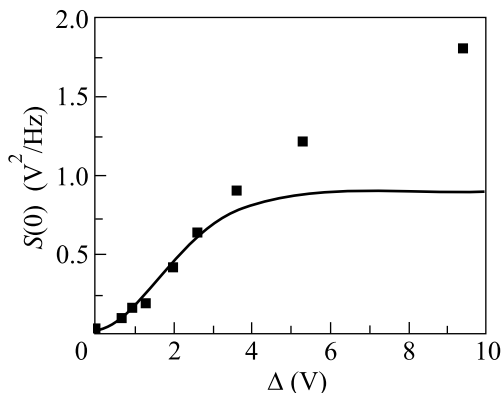


Рис.3. Зависимость шумового фона от амплитуды дихотомического шума при $\gamma/2\pi \approx 10$ Гц. Частота переключений при $\Delta = 0$ равна $w_0/2\pi \approx 180$ Гц. Сплошной линией показана зависимость (14) при $\gamma \ll w_0$

На рис.2, 3 приведены зависимости шумового фона (спектральной плотности флуктуаций на нулевой частоте $S(0)$) от амплитуды дихотомического шума для двух предельных случаев: $w_0 \gg \gamma$ и $w_0 \ll \gamma$. Видно, что во втором случае наблюдается эффект подавления шума шумом.

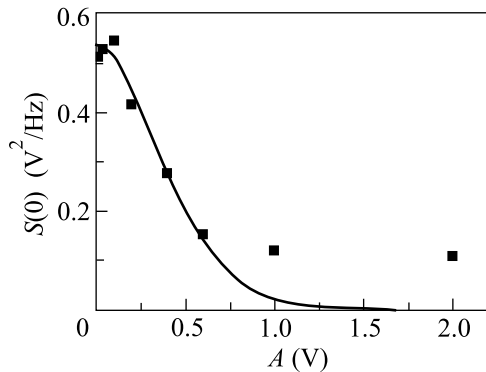


Рис.4. Шумовой фон как функция амплитуды прямоугольного сигнала с частотой $\Omega/2\pi = 1$ Гц при $\Delta = 0$. Частота переключений при $A = 0$ равна $w_0/2\pi \approx 10$. Сплошной линией показана зависимость (11) при $n = 1$ и $q = 0$

На рис.4–6 приведены зависимости шумового фона $S(0)$, интенсивность первой гармоники выходного сигнала и отношение сигнал-шум, определяемое как отношение первой гармоники к шумовому фону, от амплитуды входного сигнала A в адиабатическом пределе (период сигнала много больше всех характерных времен в нелинейной системе) при $\Delta = 0$. Вид-

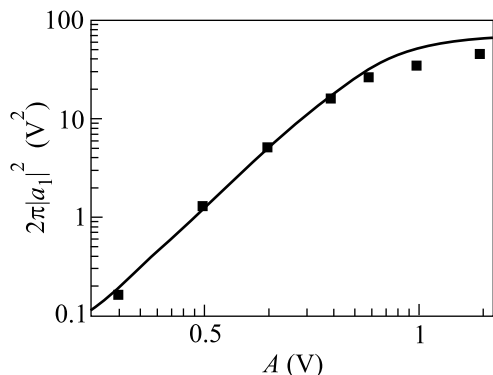


Рис.5. Зависимость интенсивности первой гармоники выходного сигнала от амплитуды прямоугольного сигнала с частотой $\Omega/2\pi = 1$ Гц при $\Delta = 0$. Сплошной линией показана зависимость $(8x_0^2/\pi)\tanh^2(v)$ (см. формулы (9) и (10) при $p = 0$)

но, что здесь существует эффект подавления полного шума приложенным сигналом.

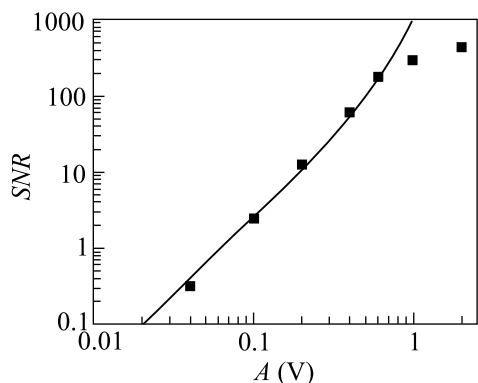


Рис.6. Зависимость отношения сигнал-шум от амплитуды прямоугольного сигнала с частотой $\Omega/2\pi = 1$ Гц при $\Delta = 0$. Сплошной линией показана зависимость (11) при $n = 1$ и $q = 0$

В заключение отметим, что отклонение от теоретических зависимостей становится существенным

при больших интенсивностях дихотомического шума $\Delta > 3$ В и амплитудах входного сигнала $A > 1$ В, когда нарушаются условия применимости крамеровского приближения. Различные пороговые значения Δ и A связаны с разными асимптотиками по переменным q и v в первой формуле (11).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 99-02-17545), Государственной программой "Физика квантовых и волновых процессов" (подпрограмма "Статистическая физика" проект VIII-3) и Государственной программой "Нейтронные исследования конденсированного состояния".

1. L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
2. В. С. Анищенко, А. В. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шимански-Гейер, *УФН* **169**, 7 (1999) [V. S. Anishchenko, A. V. Neiman, F. Moss, and L. Shimansky-Geier, *Sov. Phys. Usp.* **42**, 7 (1999)].
3. A. Neiman, L. Schimansky-Geier, F. Moss et al., *Phys. Rev.* **E60**, 284 (1999).
4. R. Rosenfeld, A. Neiman, and L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev.* **E62**, R3031 (2000).
5. J. M. G. Vilar and J. M. Rubi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 950 (2001).
6. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы. Теория и применение в физике, химии и биологии*, М.: Наука 1987. (W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-induced transitions. Theory and applications in physics, chemistry, and biology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.)
7. О. В. Геращенко, *ЖЭТФ* **116**, 1477 (1999). [O. V. Gerashchenko, *JETP* **89**, 797 (1999).]
8. O. V. Gerashchenko, S. L. Ginzburg, and M. A. Pustovoi, *Eur. Phys. J.* **B19**, 101 (2001).