Письма в ЖЭТФ, том 74, вып. 2, с. 69 – 75 © 2001 г. 25 июля

Инклюзивный подход к сканированию сечения процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ при энергиях ниже 1 ГэВ методом радиационного возврата

Н. П. Меренков[1], *О. Н. Шеховцова*

Национальный Научный Центр "Харьковский физико-технический институт, 61108 Харьков, Украина

Поступила в редакцию 6 июня 2001 г.

После переработки 28 июня 2001 г.

Обсуждается инклюзивный подход к измерению сечения процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ методом радиационного возврата. Существенным моментом этого подхода является выбор таких правил отбора, которые устраняют 3-пионные события и уменьшают фон от излучения в конечном состоянии. Радиационные поправки в процессе с излучением в начальном состоянии вычислены для условий DAPhNE с использованием приближения квазиреальных электронов для описания формы сечения и кинематики радиационного процесса.

PACS: 12.20.-m, 13.40.-f, 13.60.Hb, 13.88.+e

1. Результат недавнего эксперимента по измерению аномального магнитного момента мюона $(g-2)_\mu$ [1] вызывает сомнения в правильности СМ. "Имеется три возможности для интерпретации этого результата. Во-первых, проявление новой физики вне рамок СМ, такой как суперсимметрия. Во-вторых, есть небольшая статистическая вероятность, что экспериментальное и теоретическое значения совместимы. В-третьих, хотя и маловероятно, но история науки научила нас, что всегда есть возможность ошибок и в опытах, и в теориях" – сказал В.Хаглес, спикер эксперимента [2].

Прежде чем сделать окончательный вывод о нарушении СМ, вторая возможность должна быть исследована очень тщательно. Главным источником неопределенности в теоретическом описании $(g-2)_\mu$ является вклад адронной поляризации вакуума, который посредством дисперсионного интеграла связан с полным адронным сечением в процессе электронно–позитронной аннигиляции [3]. При больших энергиях это сечение может быть вычислено аналитически по правилам КХД, но в области энергий ниже нескольких ГэВ она теряет предсказательную силу. Поэтому прецизионные данные относительно адронного сечения при малых и промежуточных энергиях становятся очень важными.

Данные, полученные недавно в Новосибирске [4] и в Пекине [5], до сих пор не включены ни в один из анализов, но нет сомнения, что должны быть выполнены новые эксперименты с точностью на уровне одного процента.

В данной работе обсуждается возможность сканирования полного адронного сечения методом радиационного возврата [6] с использованием инклюзивного отбора событий (ИОС). ИОС подразумевает прецизионное измерение адронной инвариантной массы, и это обстоятельство делает детектирование фотона, излученного в начальном состоянии, ненужным [7]. При этом, конечно, должны быть выполнены некоторые дополнительные требования на отбор событий (см. ниже). Такой подход требует знания конечного адронного состояния и может быть реализован на DAPhNE, где доминирует $\pi^+\pi^-$-канал, благодаря радиационному возврату на ρ-резонанс, и 3-импульсы заряженных пионов могут быть измерены с высокой точностью с помощью дрейфовой камеры. Кроме того, планируемая светимость ускорителя DAPhNE достаточно высока, чтобы обеспечить необходимую высокую статистику соответствующих радиационных событий.

Заметим, что на борновском уровне сечение ИОС совпадает с сечением для событий с мечеными фотонами (если фотон попадает в узкий фотонный детектор, расположенный по направлению электронного пучка), но радиационные поправки (РП) в этих случаях различны из-за возможности излучения двух жестких фотонов. Ситуация напоминает РП в глубоко неупругом рассеянии для лептонных (аналогом являются события с мечеными фотонами) и адронных (аналогом являются ИОС) переменных. Во втором случае РП факторизуются, тогда как в первом они

[1] e-mail: merenkov@kipt.kharkov.ua

с необходимостью включают некоторые интегралы с адронным сечением, которое должно быть извлечено из данных эксперимента. Это обстоятельство делает ИОС-подход более привлекательным.

2. Рассмотрим подходящие для DAPhNE упомянутые выше дополнительные условия для отбора событий, которые должны в первую очередь обеспечить отбор только $\pi^+\pi^- + n\gamma$ конечных состояний. Кроме того, эти условия должны уменьшить фон, обусловленный излучением в конечном состоянии, и упростить теоретический расчет РП. Во-первых, чтобы удалить состояния $\pi^+\pi^-\pi^o$, необходимо отбирать только такие события, в которых разность между потерянной энергией и потерянным 3-импульсом (по модулю) мала. В терминах измеряемых 3-импульсов пионов $\mathbf{p}_\pm$ это ограничение имеет вид

$$2E - E_+ - E_- - |\mathbf{P}_\Phi - \mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-| < \eta E\ , \quad \eta \ll 1, \tag{1}$$

где E есть энергия пучка, $E_\pm$ – энергия $\pi^\pm$, и $\mathbf{P}_\Phi$ – полный 3-импульс в начальном состоянии, который появляется из-за того, что лабораторная система на DAPhNE не совпадает с системой центра масс, $|\mathbf{P}_\Phi| = 12.5$ МэВ. Неравенство (1) удобно переписать в терминах полной энергии Ω и полного модуля 3-импульса $|\mathbf{K}|$ всех фотонов в реакции $e^+ + e^- \to \to \pi^+ + \pi^- + n\gamma$:

$$\Omega - |\mathbf{K}| < \eta E. \tag{2}$$

Оптимальное значение $\eta = 0.02$ уменьшает значительно и фон, обусловленный излучением в конечном состоянии [8].

Второе ограничение должно отбирать только такие события, в которых при $n = 1$ недетектируемый фотон является коллинеарным:

$$\mathbf{K}\mathbf{p_1} > |\mathbf{K}|Ec_0, \quad c_0 = \cos\theta_0, \tag{3}$$

где $\mathbf{p_1}$ есть 3-импульс электрона и θ_0 берется примерно равным $5^\circ - 6^\circ$. Это ограничение существенно увеличивает вклад в сечение, обусловленный излучением в начальном состоянии, благодаря фактору $\ln(E^2\theta_0^2/m^2)$ (здесь m есть масса электрона) и дает возможность применить очень полезный метод квазиреальных электронов [9], чтобы вычислить РП к борновскому сечению.

Заметим, что в борновском приближении, которое соответствует $n = 1$, неравенство (2) всегда выполняется, поэтому нетривиальные ограничения, обусловленные условиями (2) и (3), возникают только на уровне РП при вычислении вклада, отвечающего за излучение двух жестких фотонов ($n = 2$).

3. Здесь мы рассмотрим случай, когда угловое фазовое пространство пионов никак не ограничено. При этом борновское сечение может быть записано следующим образом:

$$d\sigma^B = \sigma(q^2)\frac{\alpha}{4\pi^2}L^\gamma_{\mu\nu}(p_1,p_2,k)\tilde{g}_{\mu\nu}\frac{d^3k}{s\omega},$$
$$\sigma(q^2) = \frac{\pi\alpha^2|F_\pi(q^2)|^2}{3q^2}\Big(1-\frac{4m_\pi^2}{q^2}\Big)^{3/2}, \tag{4}$$

где $k(\omega)$ есть 4-импульс (энергия) фотона, q^2 – квадрат инвариантной массы пионов, m_π – масса пиона, а $F_\pi(q^2)$ – его электромагнитный формфактор; $p_{1,2}$ – 4-импульсы электрона и позитрона. Для коллинеарных событий, отбираемых неравенством (3), мы можем написать лептонный тензор в виде

$$L^\gamma_{\mu\nu}(p_1,p_2,k) = \Big[\frac{(q^2-t_1)^2+(q^2-t_2)^2}{t_1t_2} - \frac{2m^2q^2}{t_1^2}\Big]\tilde{g}_{\mu\nu} +$$
$$+ \frac{4q^2}{t_1t_2}\tilde{p}_{1\mu}\tilde{p}_{1\nu} + \Big(\frac{4q^2}{t_1t_2} - \frac{8m^2}{t_1^2}\Big)\tilde{p}_{2\mu}\tilde{p}_{2\nu},$$

где

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2},\ \tilde{p}_{1,2\mu} = p_{1,2\mu} - \frac{p_{1,2}q}{q^2}q_\mu,$$

$$t_1 = -2kp_1,\ t_2 = -2kp_2,\ s = 2p_1p_2,\ q^2 = s + t_1 + t_2$$

и опущены слагаемые порядка m^2/t_2.

Свертка тензоров в правой части (4) равна

$$L^\gamma_{\mu\nu}(p_1,p_2,k)\tilde{g}_{\mu\nu} = 2\Big[\frac{(q^2-t_2)^2+(q^2-t_1)^2}{t_1t_2} - \frac{2q^2m^2}{t_1^2}\Big]\ . \tag{5}$$

В соответствие с условием коллинеарности (3) удобно работать в системе с осью Z вдоль направления $\mathbf{p_1}$ и осью X вдоль $\mathbf{P}_\Phi$. В такой координатной системе

$$p_1 = (E,0,0,|\mathbf{p_1}|)\ ,\ \ p_2 = (E,|\mathbf{P}_\Phi|,0,-p_{2z}),$$
$$p_{2z} = E\big(1-\frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{2E^2}\big) \tag{6}$$

и

$$t_1 = -2\omega(E - |\mathbf{p_1}|\cos\theta),$$

$$t_2 = -2\omega E\big[1 + \big(1-\frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{2E^2}\big)\cos\theta\big] + 2\omega|\mathbf{P}_\Phi|\sin\theta\cos\phi,$$

$$s = 4E^2 - \mathbf{P}_\Phi^2, \tag{7}$$

$$q^2 = 4E^2 - 4E\omega - \mathbf{P}_\Phi^2\big(1-\frac{\omega}{E}\cos\theta\big) + 2\omega|\mathbf{P}_\Phi|\sin\theta\cos\phi,$$

где θ и ϕ – полярный и азимутальный углы фотона, излученного в начальном состоянии.

Интегрирование по углам в правой части (4) может быть выполнено с помощью формул

$$\int \frac{d\phi d cos\theta}{-t_2} = \frac{\pi\theta_0^2}{4\omega_0 E},$$

$$\int \frac{d\phi d\cos\theta}{-t_1} = \frac{\pi}{\omega_0 E}\Big[\Big(1 - \frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{4E^2}\Big)L_0 - \frac{\theta_0^2}{12}\Big],$$

$$\int \frac{d\phi d\cos\theta m^2}{t_1^2} = \frac{\pi}{\omega_0^2}\Big(1 - \frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{2E^2}\Big), \qquad (8)$$

$$\int \frac{d\phi d\cos\theta t_2}{t_1} = 4\pi\Big[\Big(1 - \frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{4E^2}\Big)L_0 - \frac{\theta_0^2}{3}\Big],$$

$$\int \frac{d\phi d\cos\theta}{t_1 t_2} = \frac{\pi}{4\omega_0^2 E^2}\Big[\Big(1 - \frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{4E^2}\Big)L_0 + \frac{\theta_0^2}{6}\Big],$$

$$\omega_0 = \frac{4E^2 - q^2 - \mathbf{P}_\Phi^2}{4E}\ , \quad L_0 = \ln\frac{E^2\theta_0^2}{m^2}\ .$$

При интегрировании можно положить

$$|\mathbf{P}_\Phi|\sin\theta\cos\phi = 0, \quad \mathbf{P}_\Phi^2\cos\theta = \mathbf{P}_\Phi^2,$$

что соответствует отбрасыванию очень малых членов порядка $\mathbf{P}_\Phi^2\theta_0^2/E^2$. С той же точностью можно использовать соотношение

$$\omega d\omega = \frac{\omega_0 dq^2}{4E}\Big(1 + \frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{2E^2}\Big), \qquad (9)$$

что приводит к следующей форме борновского сечения рассматриваемого процесса ($n = 1$):

$$\frac{d\sigma^B}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\frac{\alpha}{2\pi}\Big[\Big(\frac{q^4}{8\omega_0 E^3} + \frac{q^2}{2E^2} + \frac{\omega_0}{E}\Big)\Big(1 + \frac{\mathbf{P}_\Phi^2}{4E^2}\Big) \times$$
$$\times L_0 - \frac{q^2}{2\omega_0 E} + \frac{\theta_0^2}{6}\Big(\frac{q^4}{8\omega_0 E^3} + \frac{q^2}{2E^2} - \frac{2\omega_0}{E}\Big)\Big]. \qquad (10)$$

В предельном случае $\mathbf{P}_\Phi \to 0, \theta_0 \to 0$ она переходит в хорошо известный результат, соответствующий приближению квазиреальных электронов [9]:

$$\frac{d\sigma^B}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\frac{\alpha}{2\pi}P(z, L_0),\ P(z, L_0) = \frac{1+z^2}{1-z}L_0 - \frac{2z}{1-z},$$

$$z = \frac{q^2}{4E^2}, \quad s = 4E^2.$$

Параметр $|\mathbf{P}_\Phi|$ входит в сечение в виде отношения $|\mathbf{P}_\Phi^2/4E^2|$ (см. также определения s и ω_0), которое приближенно равно $1.5\cdot 10^{-4}$, а параметр $\theta_0^2 \approx 10^{-2}$. Поэтому можно пренебречь соответствующими вкладами при вычислении РП к сечению (10).

4. В общем случае фотонные РП включают вклады, обусловленные излучением жестких и мягких реальных и виртуальных фотонов. Вклад в ИОС-сечение от виртуальных и мягких поправок представляется в виде

$$\frac{d\sigma^{S+V}}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\Big(\frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2 \times$$
$$\times\big[\rho P(z, L_0) + D(L_s, L_0, z) + K(z)\big], \qquad (11)$$

где первые два слагаемые в скобках содержат все логарифмически усиленные вклады [6] (AKMT), тогда как третье контролирует нелогарифмический вклад:

$$\rho = 4(L_s - 1)\ln\Delta + 3(L_s + \ln z) + \frac{2\pi^2}{3} - \frac{9}{2}\ , L_s = \ln\frac{4E^2}{m^2},$$

$$D(L_s, L_0, z) = \frac{1+z^2}{1-z}L_0\big[(L_0 - 2L_s - \ln z)\ln z +$$
$$+ \frac{\pi^2}{3} - 2Li_2(z)\big] + \frac{1+2z-z^2}{2(1-z)}L_0 + \frac{4z\ln z}{1-z}L_s, \qquad (12)$$

$$K(z) = -\frac{1}{1-z} - \frac{8z\ln z}{1-z} + 2z\big[\ln^2(1-z) + \frac{\ln^2 z}{1-z}\big] +$$
$$+ \frac{\pi^2}{6}\big(4z + 6 - \frac{5}{1-z}\big) + \big(4z - 6 + \frac{5}{1-z}\big)Li_2(z),$$

где ΔE ($\Delta \ll 1$) представляет максимальную энергию мягкого фотона.

Что касается вклада в ИОС-сечение, обусловленного излучением дополнительного жесткого фотона, его удобно разбить на три части. Первая соответствует событиям с излучением дополнительного фотона с энергией ω_2 вдоль направления позитронного пучка. Чтобы вычислить ее, мы вводим угловой вспомогательный параметр $\theta_0' \ll 1$ и используем приближение квазиреальных электронов для описания излучения обоих фотов (одного с энергией ω_1 вдоль направления электронного пучка и второго – вдоль позитронного). Результат определяется формулой

$$\frac{d\sigma_1^H}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\int\limits_{y_0}^{1-\Delta}\Big(\frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2 P(x, L_0)P(y, L_0')\frac{dy}{y},$$
$$L_0' = \ln\frac{E^2{\theta_0'}^2}{m^2},\ x = 1 - \frac{\omega_1}{E},\ y = 1 - \frac{\omega_2}{E}, \qquad (13)$$

где $q^2 = sxy$ считается фиксированным. Максимальное значение энергии ω_2 может быть получено из ограничения (2), принимая во внимание, что для такого рода событий используемая нами в соответствии с приближением квазиреальных электронов кинематика дает

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2,\ |\mathbf{K}| = \omega_1 - \omega_2,\ \to \omega_2 < \frac{\eta E}{2},$$
$$y_0 = 1 - \frac{\eta}{2}. \qquad (14)$$

Так как $\eta \ll 1$, мы можем пренебречь членами, пропорциональными η в выражении для РП. Это позволяет заменить x на z (поскольку $q^2 = sz = sxy$) и выполнить элементарное интегрирование по y в правой части (13):

$$\frac{d\sigma_1^H}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\Big(\frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2 P(z, L_0) 2(L_0' - 1)\ln\frac{\eta}{2\Delta}. \quad (15)$$

Вторая часть обусловлена излучением двух жестких коллинеарных фотонов (каждый с энергией, большей чем ΔE) электроном при условии, что оба принадлежат узкому конусу с углом раствора $2\theta_0$ вдоль электронного пучка. Результат может быть написан с той же точностью, как и вклад виртуальной и мягкой поправки:

$$\frac{d\sigma_2^H}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\Big(\frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2 \big[A(z,\Delta)L_0^2 + B(z,\Delta)L_0 + C(z,\Delta)\big], \quad (16)$$

где функции $A(z,\Delta)$ и $B(z,\Delta)$ были вычислены в [10]:

$$A(z,\Delta) = \frac{1}{2}P_{2\theta}(z) + \frac{1+z^2}{1-z}\Big(\ln z - \frac{3}{2} - 2\ln\Delta\Big),$$

$$B(z,\Delta) = 3(1-z) + \frac{(3+z^2)\ln^2 z}{2(1-z)} - \frac{2(1+z)^2}{1-z}\ln\frac{1-z}{\Delta}.$$

Здесь $P_{2\theta}(z)$ представляет собой θ-член электронной структурной функции второго порядка (см., например, [11]). Функция $C(z,\Delta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} C(z,\Delta) = {} & \frac{4z}{1-z}\ln\frac{1-z}{\Delta} - \frac{4z}{3(1-z)} - \frac{\pi^2}{6}\frac{4z}{3} + \\ & + \Big(-\frac{17}{3} + \frac{28}{3(1-z)} - \frac{8}{3(1-z)^2}\Big)\ln z + \\ & + \frac{3 - 24z + 54z^2 - 48z^3 + 7z^4}{6(1-z)^3}\ln^2 z + \\ & + \Big(1 - \frac{7z}{3}\Big)Li_2(1-z) + J, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} J = {} & \int\limits_0^{1-z}\Big[\frac{z^2 + (1-x)^4}{x(1-x-z)(1-x)^2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t}L(t,x,z) + \\ & + \frac{z+x}{2(1-x)}L_1(x,z) + \frac{x(1-x-z) - 3z}{2(1-x)^2}L_2(x,z)\Big]dx, \end{aligned}$$

где логарифмические функции L, L_1 и L_2 определены следующим образом:

$$L(t,x,z) = \ln\frac{(1-x)\sqrt{F(t,x,z)} + tx[z - x(1-x-z)] + (1-x-z)(1-x)^2}{2\big(1 + \frac{(1-x-z)t}{zx}\big)(1-x-z)(1-x)^2},$$

$$L_1(x,z) = \ln\frac{(x+z)\sqrt{F(1,x,z)} + (1-x-z)[z - x(1-x-z)] + x(x+z)^2}{2z(1-x-z)},$$

$$L_2(x,z) = \ln\frac{(1-x)\sqrt{F(1,x,z)} + x[z - x(1-x-z)] + (1-x-z)(1-x)^2}{2(1-x-z)(1-x)^2},$$

$$F(t,x,z) = (1-x-z)^2(1-x)^2 + 2tx(1-x-z)[z - x(1-x-z)] + t^2x^2(x+z)^2 .$$

Интеграл по переменной x в правой части (17) расходится, когда $x \to 0$ и $x \to 1-z$. Однако структура интеграла такова, что эти расходимости компенсируют друг друга, и это можно видеть, принимая во внимание что

i) интеграл по t сходится,

$$ii) \lim_{x\to 0}\frac{z^2 + (1-x)^4}{x(1-x-z)(1-x)^2}L(t,x,z) = -\frac{1+z^2}{x(1-z)}\ln\frac{t(1-z)}{xz},$$

$$\lim_{x\to 1-z}\frac{z^2 + (1-x)^4}{x(1-x-z)(1-x)^2}L(t,x,z) = \frac{1+z^2}{(1-x-z)(1-z)}\ln\frac{t(1-z)}{(1-x-z)z}. \quad (18)$$

Поэтому интеграл в (17) может быть оценен численно (внутренний интеграл по t вычисляется аналитически, но результат громоздкий и не приводится в этой краткой статье).

Третья часть вклада от излучения двух жестких фотонов обусловлена событиями, в которых один фотон с энергией ω_1 является коллинеарным, а другой (с энергией ω_2) покрывает углы между $\pi - \theta_0'$ и θ_0.

Для таких событий в соответствии с используемым приближением мы полагаем $k_1 = (1-x)p_1$, чтобы описать форму сечения и разрешить ограничения (2) и (3). В рамках этого подхода мы исходим из следующего выражения для дифференциального сечения:

$$d\sigma_3^H = \sigma(q^2)\frac{\alpha}{2\pi}P(x,L_0)L^{\gamma}_{\mu\nu}(xp_1,p_2,k_2)\tilde{g}_{\mu\nu}\frac{\alpha}{4\pi^2}\frac{d^3k_2dx}{\omega_2 xs},$$

$$\frac{d^3k_2}{\omega_2} = 2\pi\omega_2 d\omega_2 dc_2, \quad c_2 = \cos\theta_2, \quad x = 1-\frac{\omega_1}{E}, \quad (19)$$

где θ_2 – полярный угол неколлинеарного фотона. Наша цель получить распределение по квадрату инвариантной массы пионов q^2, поэтому удобно использовать соотношения

$$q^2 = 4E(E-\Omega)+2\omega_1\omega_2(1-c_2), \ \omega_2 = \Omega-\omega_1,$$
$$dc_2 = \frac{dq^2}{2\omega_1\omega_2}, \ d\omega_2 = d\Omega. \quad (20)$$

В этом случае мы также можем пренебречь массой электрона в лептонном тензоре $L^{\gamma}_{\mu\nu}$. Соответствующее дифференциальное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma_3^H}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\Big(\frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2\Big\{P(x,L_0)\Big[\frac{2q^4}{xu_1u_2} -$$
$$-2q^2\Big(\frac{1}{xu_1}+\frac{1}{u_2}\Big)+\frac{xu_1}{u_2}+\frac{u_2}{xu_1}\Big]\frac{d\omega_1 d\Omega}{\omega_1(E-\omega_1)}\Big\}, \quad (21)$$

$$u_1 = -2k_2p_1 = -\frac{4E^2\Omega_z}{\omega_1},$$
$$u_2 = -2k_2p_2 = -\frac{4E}{\omega_1}[\omega_1(\Omega-\omega_1)-E\Omega_z],$$
$$\Omega_z = \Omega - E(1-z).$$

Полезно переписать выражение в фигурных скобках в форме, удобной для интегрирования по ω_1 и Ω:

$$\Big\{-L_0 - \frac{zE^2L_0}{(E-\omega_1)^2}+\frac{[2z-(1+z)L_0]E}{E-\omega_1}+$$
$$+\frac{2(1+z^2)L_0-4z-(1-z)^2-(1-z)(\Omega-2\omega_1)}{\omega_1(\Omega-\omega_1)-E\Omega_z}\Big\}\times$$
$$\times\frac{d\omega_1 d\Omega}{E\Omega_z}, \quad (22)$$

где мы опустили члены, не содержащие в знаменателе малого множителя Ω_z, который по порядку величины равен $\eta\Delta$ (см. ниже выражения для Ω_{max} (24) и Ω_{min} (25)).

Теперь мы должны найти область интегрирования, которая определяется ограничениями (2) и (3) на отбор событий, а также неравенствами

$$-c_0' < c_2 < c_0, \quad E\Delta < \omega_1 < \Omega - E\Delta_1, \quad c_0' = \cos\theta_0' \quad (23)$$

для возможных углов неколлинеарного фотона и энергий коллинеарного. Ограничение (2) определяет максимальное значение Ω, тогда как ограничение (3) – минимальное значение ω_1 при фиксированном Ω:

$$\Omega_{max} = E(1-z)\big(1+\frac{\eta}{2}\big),$$
$$\omega_1 \geq \frac{2E\Omega_z}{\Omega-|\mathbf{K}|c_0}, \ |\mathbf{K}| = \sqrt{\Omega^2-4E\Omega_z}. \quad (24)$$

Чтобы получить Ω_{min} – минимальное значение Ω – нужно использовать первое из соотношений (20) при $\omega_2 = \Delta E, \ c_2 = c_0$:

$$\Omega_{min}\Delta(1-c_0) = 2E[\Omega_{min}-E(1-z)], \ \to \Omega_{min} =$$
$$= E(1-z)\big(1+\frac{\Delta(1-c_0)}{2}\big). \quad (25)$$

Из условия $c_2 > -c_0'$ следует, что

$$\omega^- < \omega_1 < \omega^+,$$
$$\omega^{\pm} = \frac{\Omega}{2}\Big[1 \pm \sqrt{1-\frac{4E\Omega_z}{\Omega^2}\big(1+\frac{1-c_0'}{2}\big)}\Big]. \quad (26)$$

Наконец, неравенство $c_2 < c_0$ дает

$$\omega_1 > \omega_+ \text{ или } \omega_1 < \omega_-$$
$$if \ \Omega \leq E(1-z)\big(1+\frac{(1-c_0)(1-z)}{8}\big),$$
$$\omega_{\pm} = \frac{\Omega}{2}\Big[1\pm\sqrt{1-\frac{8E\Omega_z}{\Omega^2(1-c_0)}}\Big]. \quad (27)$$

Чтобы получить область интегрирования, необходимо непротиворечиво объединить неравенства (23)–(27). В результате получаем

$$\omega_{min} < \omega_1 < \omega_- \ \text{ и } \ \omega_+ < \omega_1 < \Omega - \Delta E,$$
$$\Omega_{min} < \Omega < E(1-z)(1+\Delta),$$
$$\omega_{min} < \omega_1 < \omega_- \ \text{ и } \ \omega_+ < \omega_1 < \omega^+,$$
$$E(1-z)(1+\Delta) < \Omega < E(1-z)\big(1+\frac{(1-c_0)(1-z)}{8}\big),$$
$$\omega_{min} < \omega_1 < \omega^+,$$
$$E(1-z)\big(1+\frac{(1-c_0)(1-z)}{8}\big) < \Omega < \Omega_{max}, \quad (28)$$

где ω_{min} определяется неравенством в (24).

Список необходимых нам интегралов по области (28) есть:

$$\int \frac{d\omega_1 d\Omega}{E\Omega_z} = (1-z)\big(2-\ln\frac{1+\xi}{\xi}\big), \quad \xi = \frac{\eta}{(1-c_0)(1-z)},$$

$$\int \frac{d\omega_1 d\Omega}{(E-\omega_1)\Omega_z} = -\ln z \ln \xi + Li_2(1-z) - - Li_2(-\xi z) + Li_2(-\xi) - Li_2\big(-\frac{1-z}{z}\big),$$

$$\int \frac{E d\omega_1 d\Omega}{(E-\omega_1)^2\Omega_z} = \frac{1}{z}\big[-(1+z)\ln z - (1-z)\ln\frac{1+\xi z}{\xi}\big], \tag{29}$$

$$\int \frac{(\Omega-2\omega_1)d\omega_1 d\Omega}{[\omega_1(\Omega-\omega_1)-E\Omega_z]\Omega_z} = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{1-c_0}{2} + + \ln\frac{\eta}{2\Delta}\ln\frac{(1-c_0)(1-c_0')}{4} - 2Li_2(-\xi),$$

$$\int \frac{E d\omega_1 d\Omega}{[\omega_1(\Omega-\omega_1)-E\Omega_z]\Omega_z} = \frac{1}{1-z}\Big[\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{1-c_0}{2} - - \ln\frac{\eta}{2\Delta}\ln\frac{(1-c_0)(1-c_0')}{4} - \ln^2\xi\Big].$$

Используя разложение (22) и эти интегралы, вклад третьей части от излучения двух фотонов можно представить следующим образом:

$$\frac{d\sigma_3^H}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\Big(\frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2\big[2P(z,L_0)G_1 + L_0G_2 + G_3\big], \tag{30}$$

$$G_1 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{1-c_0}{2} - \ln\frac{\eta}{2\Delta}\ln\frac{(1-c_0)(1-c_0')}{4} - \ln^2\xi,$$

$$G_2 = (1-z)\Big[-2 + \ln\frac{(1+\xi)(1+\xi z)}{\xi^2}\Big] + + (1+z)\Big[(1+\ln\xi)\ln z + Li_2(-\xi z) + Li_2\Big(-\frac{1-z}{z}\Big) - - Li_2(-\xi) - Li_2(1-z)\Big],$$

$$G_3 = -(1-z)\Big(\frac{\pi^2}{3} - \ln^2\xi\Big) + 2Li_2(-\xi) + + 2z\Big[Li_2(1-z) - Li_2(-\xi z) - Li_2\Big(-\frac{1-z}{z}\Big)\Big].$$

5. Полная радиационная поправка к борновскому сечению (10) представляется в виде суммы

$$\frac{\sigma^{RC}}{dq^2} = \frac{\sigma^{S+V}}{dq^2} + \frac{\sigma_1^H}{dq^2} + \frac{\sigma_2^H}{dq^2} + \frac{\sigma_3^H}{dq^2}. \tag{31}$$

Вспомогательный инфракрасный параметр Δ входит в отдельные слагаемые в (31) в виде

$$2P(z,L_0)\ln\Delta\Big[2(L_s-1) - (L_0'-1) - - (L_0-1) + \ln\frac{\theta_0^2{\theta_0'}^2}{16}\Big] \tag{32}$$

(здесь и ниже мы используем разложение c_0 и c_0'), что равно нулю в соответствии с определением больших логарифмов L_0, L_s и L_0' (см. (8), (12) и (13)). Легко проверить, что угловой вспомогательный параметр θ_0' также сокращается в сумме (31) и она может быть представлена как

$$\frac{d\sigma^{RC}}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\Big(\frac{\alpha}{2\pi}\Big)^2\Big\{\frac{1}{2}L_0^2P_{2\theta}(z) + + P(z,L_0)\Big[L_s\Big(\frac{3}{2} + 2\ln\frac{\eta}{2}\Big) + \ln\frac{4}{\theta_0^2}\Big(\frac{3}{2} + 2\ln\frac{\eta}{z\theta_0}\Big) - \tag{33}$$
$$-2\ln^2\xi - 2\ln\frac{\eta}{2} + 3\ln z + \frac{5\pi^2}{3} - \frac{9}{2}\Big] + L_0F_1 + F_2\Big\},$$

где

$$F_1 = \frac{3-8z+z^2}{2(1-z)} - \frac{2(1+z)^2}{1-z}\ln(1-z) + + \Big[\frac{4z}{1-z} + (1+z)(1+\ln\xi)\Big]\ln z + \frac{1}{2}(1+z)\ln^2 z + + \frac{1+z^2}{1-z}\Big(\frac{\pi^2}{3} - 2Li_2(z)\Big) + (1-z)\ln\frac{(1+\xi)(1+\xi z)}{\xi^2} + +(1+z)\Big[Li_2(-\xi z) + Li_2\Big(-\frac{1-z}{z}\Big) - Li_2(-\xi) - Li_2(1-z)\Big],$$

$$F_2 = (1-z)\ln^2\xi - \frac{3+4z}{3(1-z)} + \frac{4z}{1-z}\ln(1-z) + + \Big[-2z\ln\xi + \frac{3-18z+7z^2}{3(1-z)^2}\Big]\ln z + 2z\ln^2(1-z) + + \frac{3-12z+30z^2-36z^3+7z^4}{6(1-z)^3}\ln^2 z + + \frac{\pi^2}{6}\Big(4 + \frac{14z}{3} - \frac{5}{1-z}\Big) + Li_2(z)\Big(4z - 6 + \frac{5}{1-z}\Big) + + \Big(1 - \frac{z}{3}\Big)Li_2(1-z) + 2Li_2(-\xi) - - 2z\Big[Li_2(-\xi z) + Li_2\Big(-\frac{1-z}{z}\Big)\Big] + J\ .$$

Как было сказано выше, РП имеют факторизованную форму: сечение рождения пионной пары при низких энергиях $\sigma(q^2)$, которое является объектом прецизионных измерений, способных решить судьбу СМ, входит в (33) как отдельный множитель. Другой множитель (выражение в фигурных скобках) имеет чисто электродинамическое происхождение и не зависит от сильного взаимодействия пионов. Он определяется квадратом инвариантной массы пионов q^2, а также физическими параметрами η и θ_0, которые входят в правила для ИОС.

Существует еще один вклад в РП, обусловленный излучением двух жестких фотонов при условии, что ни один из них не принадлежит узкому конусу вдоль направления электронного пучка, однако коллинеарное ограничение (3) выполняется. Этот вклад не может быть рассчитан в приближении квазиреальных электронов и должен быть оценен другими методами. В частности, лептонный токовый тензор двойного тормозного излучения может быть взят в пределе $m \to 0$. Мы рассчитываем вычислить его в другой публикации, но уверены, что вследствие жесткого ограничения (2) на отбор событий этот вклад мал и не может влиять на величину сечения при процентной точности.

Проведенное выше рассмотрение соответствует случаю, когда конечное состояние $e^+e^-\pi^+\pi^-$ устранено из анализа ИОС-сечения. В противном случае есть дополнительный вклад, обусловленный рождением e^+e^--пары в начальном состоянии [6]. Основная часть этого вклада связана с коллинеарной кинематикой, когда e^+e^--пара излучается вдоль направления электронного пучка. В рамках НЛО приближения (в рассматриваемом случае это приближение учитывает только логарифмически усиленные слагаемые) он может быть написан как

$$\frac{d\sigma^{e^+e^-}}{dq^2} = \frac{\sigma(q^2)}{s}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\left[P_1(z)L_0^2 + P_2(z)L_0\right], \qquad (34)$$

где функции $P_1(z)$ и $P_2(z)$ читатель может выделить из соответствующего результата для сечения Баба рассеяния на малые углы [12]. В этом случае появляется дополнительный фон, обусловленный двухфотонным механизмом рождения пионной пары, и этот фон надо оценить. Мы хотим вернуться к этому вопросу в другой публикации.

Рассмотренное в этой работе борновское сечение (10) и РП к нему, определенные формулами (33) и (34), описывают события с по крайней мере одним коллинеарным (по отношению к направлению электронного пучка) фотоном или одной коллинеарной электронно-позитронной парой. Условия DAPhNE позволяют отбирать такие же события вдоль позитронного пучка. Поэтому все эти вклады должны быть удвоены.

Авторы благодарны В. А. Хозе и Г. Венанзони за обсуждение правил ИОС на DAPhNE.

1. H. N. Brown, G. Bunce, R.M. Carey et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 227 (2001).
2. *Brookhaven Bulletin*, BNL 01–12, February 8, 2001.
3. Jegerlehner, preprint DESY 99–007, hep–ph/9901386; M. Davier and A. Hőcker, Phys. Lett. **B419**, 419 (1998), **B435**, 427 (1998); A. Czarnecki and W. Marciano, hep–ph/0102122; F.J. Yndurain, hep–ph/0102312.
4. R. R. Akhmetshin et al., CDM–2 Collaboration, preprint Budker INP–99–10, hep–ex/9904027; Nucl. Phys. **A675**, 424 (2000); Phys. Lett. **B475**, 190 (2000).
5. D. Kong, hep–ph/9903521; BES Collaboration: J. Z. Bai et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 594 (2000).
6. A. B. Arbuzov, E. A. Kuraev, N. P. Merenkov, and L. Trentadue, JHEP **12**, 009 (1998); S. Spangolo, Eur.Phys. J. **C6**, 637 (1999); S. Binner, J. H. Kűhn and K. Melnikov, Phys. Lett. **B459**, 279 (1999); J. Kűhn, hep–ph/0101100.
7. V. A. Khoze, M. I. Konchatnij, N. P. Merenkov et al., Eur. Phys. J. **C18**, 481 (2001).
8. G. Catani, A. Denig, W. Kluge, and G. Venanzoni, KLOE MEMO 195, August 13, 1999.
9. V. N Baier, V. S. Fadin, and V. A. Khoze, Nucl. Phys. **B65**, 381 (1973).
10. Н. П. Меренков, ЯФ **48**, 1782 (1988).
11. S. Jadach, M. Skrzypek, and B. F. L. Ward, Phys. Rev. **D47**, 3733 (1993).
12. A. B. Arbuzov, E. A. Kuraev, N. P. Merenkov, and L. Trentadue, ЖЭТФ **108**, 1164 (1995).