

# Асимптотика слабо коллапсирующих решений нелинейного уравнения Шредингера

Ю. Н. Овчинников<sup>1)</sup>, В. Л. Верещагин<sup>+</sup>

Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems, D-01187 Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117940 Москва, Россия

<sup>+</sup> Институт математики с вычислительным центром УрО РАН, 450000 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 21 июня 2001 г.

Исследована асимптотика общего положения трехпараметрического слабо коллапсирующего решения нелинейного уравнения Шредингера. Показано, что существует дискретный набор состояний с нулевой энергией. В пространстве параметров  $(A, C_1)$  существуют две близкие линии, вдоль которых амплитуда осцилляционных членов экспоненциально мала по параметру  $C_1$ .

PACS: 02.30.Jr, 03.65.Ge

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0, \quad (1)$$

где  $\psi$  – скалярная функция в  $d$ -мерном пространстве,  $\Delta$  – оператор Лапласа, имеет слабо коллапсирующие решения вида

$$\psi(r, t) = \lambda^\nu \varphi(\rho\lambda) \exp(i\chi(\rho, t)). \quad (2)$$

Здесь параметр  $\lambda = \lambda(t)$ ,  $\varphi$  – вещественная функция,  $\rho = |r|$ . Слабо коллапсирующие решения исследовались в работах [1–3]. Для всякого решения уравнения (1) сохраняется число частиц и полная энергия. Эти два закона сохранения приводят к следующим уравнениям на параметр  $\nu$  и функции  $\lambda, \chi$  [4, 5]:

$$\nu\sigma = 1, \quad \chi(\rho, t) = \chi_0(t) + \tilde{\chi}(\rho\lambda), \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad \chi_0(t) = \frac{C_1}{2} \ln(t_0 - t),$$

где  $C, C_1$  – константы,  $t_0$  – момент коллапса. Система уравнений на функции  $\varphi, \tilde{\chi}$  сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка [4, 5]:

$$\begin{aligned} Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} - \frac{(d-1)(d-3)}{2y^2} Z' - \\ - \frac{1}{C^2} \left[ C_1 Z' - \frac{y(yZ' + (2/\sigma - d)Z)}{4C^2} \right] - \\ - \frac{(yZ' + (2/\sigma - d)Z)^2}{8C^4 Z'} + \frac{2(Z')^{\sigma+1}}{y^{(d-1)\sigma}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции  $\varphi, \tilde{\chi}$  связаны с функцией  $Z$  простыми соотношениями:

$$\varphi = \frac{\sqrt{Z'}}{y^{(d-1)/2}}, \quad \tilde{\chi}' = -\frac{yZ' + (2/\sigma - d)Z}{4C^2 Z'}. \quad (5)$$

Наша задача – исследование возможных типов асимптотического поведения решений уравнения (4). Для простоты мы ограничимся здесь наиболее физически интересным случаем  $d = 3, \sigma = 1$ . Параметр  $C$  соответствует масштабному преобразованию в уравнении (4):

$$y = C\tilde{y}; \quad Z = C\tilde{Z}(\tilde{y}), \quad (6)$$

поэтому в дальнейшем мы будем считать  $C = 1$ .

Существует всего одно однопараметрическое семейство решений уравнения (4), удовлетворяющее физическим граничным условиям в нуле [4, 5]:

$$Z(y) = Ay^3 + Ay^5 \left( \frac{C_1}{10} - \frac{3}{5}A \right) + \dots \quad (7)$$

Для исследования решения в асимптотической области ( $y \rightarrow \infty$ ) умножим обе части уравнения (4) на  $8Z'$  и продифференцируем по  $y$ . Опуская несущественные члены, получим линейное уравнение

$$Z' \cdot \left\{ 4Z'''' + y(Z' + yZ'') - 8C_1 Z'' - Z \right\} = 0. \quad (8)$$

В асимптотической области ( $y \rightarrow \infty$ ) общее решение этого уравнения есть

$$Z = By + \frac{B_1}{y} \left( 1 + \frac{16C_1}{9y^2} + \dots \right) - \quad (9)$$

<sup>1)</sup> e-mail: ovc@itp.ac.ru

$$-\frac{4}{y^2}(1+\dots) \left[ d_1 \cos\left(\frac{y^2}{4} - 2C_1 \ln y\right) + d_2 \sin\left(\frac{y^2}{4} - 2C_1 \ln y\right) \right].$$

Разложение в формуле (9) идет по степеням  $1/y^2$ . Четыре коэффициента  $\{B, B_1, d_1, d_2\}$  связаны одним соотношением. Это соотношение легко находится подстановкой формулы (9) в уравнение (4) (см. также [6])

$$B_1 = -2BC_1 - \frac{(d_1^2 + d_2^2)}{B} \quad (10)$$

Для того чтобы решение (7), (9) имело нулевую энергию, необходимо и достаточно выполнение условий

$$d_1 = d_2 = 0. \quad (11)$$

Коэффициенты  $d_1, d_2$  являются аналитическими функциями параметров  $\{A, C_1\}$ . Тем самым возможно существование лишь дискретного множества точек  $\{A, C_1\}$  (конечного или бесконечного), на котором энергия равна нулю. Одна такая точка была найдена численно в работе [7]:

$$\{A, C_1\} = \{0.644; 1.09\}. \quad (12)$$

Кроме этой точки, существуют также и другие точки, соответствующие решениям с нулевой энергией. Мы приведем здесь некоторые из них:

$$\{A, C_1\} = \{0.365; 3.113\}; \quad (13)$$

$$\{A, C_1\} = \{0.913; 4.41\}; \quad \{A, C_1\} = \{0.924; 5.89\};$$

$$\{A, C_1\} = \{1.2619; 7.26\}; \quad \{A, C_1\} = \{1.435; 8.66\};$$

$$\{A, C_1\} = \{1.689; 10.04\}; \quad \{A, C_1\} = \{1.907; 11.42\};$$

$$\{A, C_1\} = \{2.137; 12.79\}; \quad \{A, C_1\} = \{2.362; 14.16\}.$$

Перейдем теперь к исследованию области значений параметра  $C_1 \gg 1$ . В области значений  $y \ll \sqrt{C_1}$  уравнение (4) сводится к более простому:

$$Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} + \frac{2(Z')^2}{y^2} - C_1 Z' = 0. \quad (14)$$

Полагая

$$Z' = \phi, \quad (15)$$

получим уравнение второго порядка на функцию  $\phi$ :

$$\phi'' - \frac{(\phi')^2}{2\phi} + \frac{2\phi^2}{y^2} - C_1 \phi = 0. \quad (16)$$

В области  $1 \ll y \ll \sqrt{C_1}$  общее решение уравнения (16) есть

$$\phi = \frac{C_1}{2} y^2 + \tilde{\phi}, \quad (17)$$

где  $\tilde{\phi}$  есть решение линейного уравнения

$$\tilde{\phi}'' + C_1 \tilde{\phi} + \frac{2}{y^2} \tilde{\phi} - \frac{2}{y} \tilde{\phi}' = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет общее решение вида

$$\tilde{\phi} = \tilde{B}_1 y \sin(\sqrt{C_1} y) + \tilde{B}_2 y \cos(\sqrt{C_1} y). \quad (19)$$

Тем самым, для больших значений параметра  $C_1$  существует область значений  $y$  таких, что  $y \ll \sqrt{C_1}$ , в которой реализуется промежуточная асимптотика

$$Z' = \phi = \frac{C_1}{2} y^2 + y(\tilde{B}_1 \sin(\sqrt{C_1} y) + \tilde{B}_2 \cos(\sqrt{C_1} y)). \quad (20)$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$\left| A - \frac{C_1}{6} \right| \ll C_1. \quad (21)$$

Тогда функция

$$\phi = \frac{C_1}{2} y^2 + \frac{3y}{\sqrt{C_1}} \left( A - \frac{C_1}{6} \right) \sin(\sqrt{C_1} y) \quad (22)$$

является решением уравнения (16) в области  $y \ll \sqrt{C_1}$ , удовлетворяющем граничным условиям для функции  $Z$ .

Покажем, что существуют две близкие линии в плоскости  $\{A, C_1\}$ , вдоль которых амплитуды  $d_{1,2}$  в формуле (9) экспоненциально малы при больших значениях параметра  $C_1$ . На этих же линиях расположены значения параметров  $\{A, C_1\}$ , при которых энергия равна нулю. Умножим обе части уравнения (4) на  $Z'$  и проинтегрируем по  $y$ . В результате приведем уравнение на функцию  $Z$  к виду

$$Z'''' + \frac{y}{4}(Z' + yZ'') - 2C_1 Z'' - \frac{1}{4}Z = 4(Z')^2/y^3 - 6Z'Z''/y^2. \quad (23)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию для функции  $Z$  в нуле, можно представить в виде

$$Z = AZ_4 + D_1 Z_1 + D_2 Z_2 + D_3 Z_3 + D_4 Z_4, \quad (24)$$

где константа  $A$  определена в уравнении (7), а функции  $Z_{1,2,3,4}$  являются решениями линейного уравнения

$$Z_k'''' + \frac{y}{4}(Z_k' + yZ_k'') - 2C_1 Z_k'' - \frac{1}{4}Z_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (25)$$

Функции  $Z_k$  мы выбрали в виде

$$\begin{aligned} Z_1 &= y, \quad Z_2 = [1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} y^{2n}], \\ Z_3 &= y^2 [1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} y^{2n}], \\ Z_4 &= y^3 [1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(3)} y^{2n}], \end{aligned} \quad (26)$$

Функции  $D_k$  в формуле (24) выражаются через интегралы от производных функции  $Z$ :

$$D_k = -\frac{1}{12} \int_0^y dy P_{k4} \left( 4(Z')^2/y^3 - 6Z'Z''/y^2 \right), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} P_{14} &= -\det \begin{pmatrix} Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_2' & Z_3' & Z_4' \\ Z_2'' & Z_3'' & Z_4'' \end{pmatrix}, \\ P_{24} &= \det \begin{pmatrix} y & Z_3 & Z_4 \\ 1 & Z_3' & Z_4' \\ 0 & Z_3'' & Z_4'' \end{pmatrix}, \\ P_{34} &= -\det \begin{pmatrix} y & Z_2 & Z_4 \\ 1 & Z_2' & Z_4' \\ 0 & Z_2'' & Z_4'' \end{pmatrix}, \\ P_{44} &= \det \begin{pmatrix} y & Z_2 & Z_3 \\ 1 & Z_2' & Z_3' \\ 0 & Z_2'' & Z_3'' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

В области  $y \ll \sqrt{C_1}$  функции  $Z_3, Z_4$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{1}{C_1} \left[ \operatorname{ch}(\sqrt{2C_1}y) - Z_2 \right], \\ Z_4 &= \frac{3}{C_1} \left( \frac{1}{\sqrt{2C_1}} \operatorname{sh}(\sqrt{2C_1}y) - Z_1 \right). \end{aligned} \quad (29)$$

При прохождении через точку поворота  $\{y = 2\sqrt{2C_1}\}$  функции  $Z_3, Z_4$  приобретут осциллирующие слагаемые, связь между которыми с экспоненциальной точностью определяется уравнением (29). Условие обращения в нуль этих слагаемых в формуле (24) определяет линии на плоскости  $\{A, C_1\}$ , на которых амплитуда осциллирующей добавки мала экспоненциально:

$$\begin{aligned} A + \frac{1}{12} \int_0^{\infty} \left( -\frac{6Z'Z''}{y^2} + 4\frac{(Z')^2}{y^3} \right) \times \\ \times \det \begin{pmatrix} y & Z_2 & T \\ 1 & Z_2' & T' \\ 0 & Z_2'' & T'' \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $T = (\sqrt{2C_1}/3)Z_4 - Z_3$ .

С учетом формул (26), (29) уравнение (30) приводится к виду

$$A + \frac{1}{6} \int_0^{\infty} dy e^{-\sqrt{2C_1}y} \left( 4\frac{(Z')^2}{y^3} - 6\frac{Z'Z''}{y^2} \right) = 0. \quad (31)$$

Это уравнение можно переписать в более удобном виде:

$$A = \int_0^{\infty} dy \frac{(Z')^2}{y^2} \left\{ \sqrt{\frac{C_1}{2}} + \frac{1}{3y} \right\} e^{-\sqrt{2C_1}y}. \quad (32)$$

В уравнении (32) существенные значения  $y \sim 1/\sqrt{C_1}$ . Предположим, что существует решение уравнения (32) в области

$$\left| A - \frac{C_1}{6} \right| \ll C_1. \quad (33)$$

В этом случае функция  $Z_1$  определяется уравнением (22). Из формул (22), (32) находим

$$\begin{aligned} \left( A - \frac{C_1}{6} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} dt e^{-t} (3t + 2) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - O\left(\frac{A}{C_1} - \frac{1}{6}\right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку мы имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} dt e^{-t} (3t + 2) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad (35)$$

то уравнение (32) имеет два близких решения:

$$6A = C_1 + O(1/C_1), \quad (36)$$

которые расщепятся лишь с учетом экспоненциально малых по  $C_1$  членов. На рис. 1, 2 представлены зависимости  $\varphi/\sqrt{8C_1}, \chi/\sqrt{8C_1}$  в точках с нулевой энергией  $\{A, C_1\}$ : (0.644; 1.09) и (0.913; 4.41) как функции параметра  $x = y/\sqrt{8C_1}$ . В соответствии с формулой (22) все зависимости являются плавными, без видимых осцилляций.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{t}{4}(Z' + tZ'') - \frac{1}{4}Z'' - \frac{1}{4}Z = \frac{4}{t^3}(Z')^2 - \frac{6}{t^2}Z'Z''. \quad (37)$$

Это уравнение имеет решение  $Z_0$ , регулярное в нуле:

$$Z_0 = \frac{t^3}{48} - \frac{t^5}{90} + \frac{2t^7}{2835} + \dots \quad (38)$$

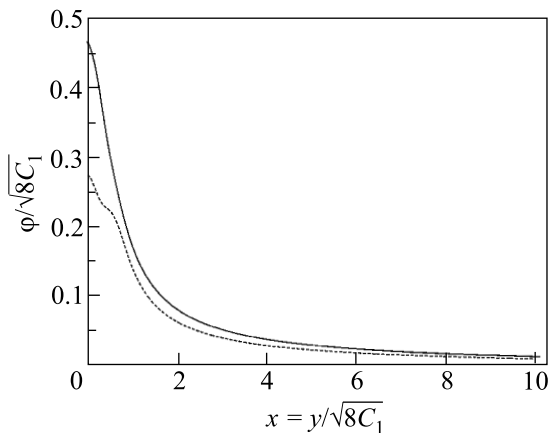


Рис.1. Функции  $\varphi/\sqrt{8C_1}$  в точках с нулевой энергией  $(A, C_1) = (0.644; 1.09)$  – сплошная линия и  $(A, C_1) = (0.913; 4.41)$  – штриховая линия;  $x = y/\sqrt{8C_1}$

В области  $t \gg 1$  общее решение уравнения (37) определяется выражением

$$\hat{Z}_0(t \gg 1) = Bt + \frac{B_1}{t} + \dots \quad (39)$$

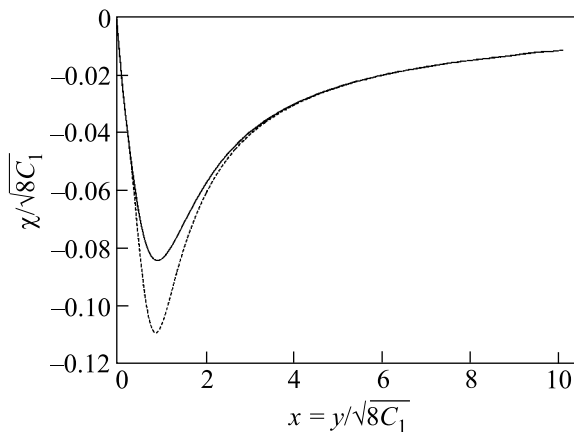


Рис.2. Функции  $\chi/\sqrt{8C_1}$  в точках с нулевой энергией  $(A, C_1) = (0.644; 1.09)$  – сплошная линия,  $(A, C_1) = (0.913; 4.41)$  – штриховая линия;  $x = y/\sqrt{8C_1}$

Мы покажем в подробной публикации, что решения уравнения (4) с нулевой энергией удовлетворяют оценке

$$\left| \frac{Z(2\sqrt{2C_1}t, C_1)}{(2\sqrt{2C_1})^5} - Z_0(t) \right| / Z_0(t) < \frac{\text{const}}{C_1^2} \quad (40)$$

равномерно по номеру решения и координате  $y$ . Уравнение (36) может быть улучшено, и в следующем порядке по  $C_1$  принимает вид

$$6A = C_1 + \frac{2}{3C_1} + O(1/C_1^3), \quad C_1 \gg 1. \quad (41)$$

Решения с нулевой энергией при  $C_1 \rightarrow \infty$  образуют два эквидистантных набора. Параметры  $\{A, C_1\}$  решений с нулевой энергией удовлетворяют соотношению (41). С увеличением параметра  $C_1$  точность численного определения точек с нулевой энергией быстро падает. На рис.3 точки обозначают нулевую энергию. Сплошные линии соответствуют двум рас-

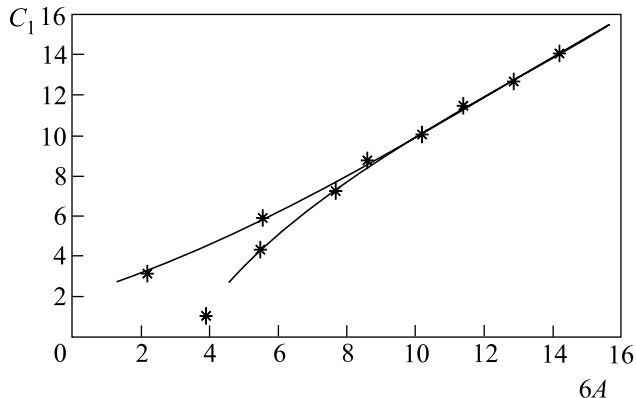


Рис.3. \* – точка с нулевой энергией на плоскости  $(6A, C_1)$ , сплошные линии определены уравнениями (42)

щепленным линиям, на которых амплитуда осцилляционных членов экспоненциально мала по параметру  $C_1$ :

$$6A = \left\{ C_1 + \frac{2}{3C_1} - \frac{8}{9C_1^3} + \dots \right\} \mp 3.3 C_1^{1.25} \exp(-0.712C_1). \quad (42)$$

Вывод формулы (42) будет дан в подробной публикации.

Решения с нулевой энергией по-видимому ничем не выделены. Расходимость интеграла для полного числа частиц делает необходимым обрезку решения для всякого слабоколлапсирующего решения. При ненулевой энергии существует область значений параметров  $\{A, C, C_1\}$ , в которой функция  $\varphi$  имеет глубокий минимум в некоторой точке  $y = y^*$  [4, 5]. Эту точку и следует выбирать за место обрезания. При нулевой энергии такой точки не существует. Слабое убывание решения делает необходимым производить обрезку на достаточно больших значениях  $y$ . Тем самым резко снижается вероятность образования состояния, приводящего к коллапсу. Для точек общего положения  $\{A, C, C_1\}$  существует набор таких параметров, что глубокий минимум  $\varphi$  лежит при  $y \sim 1$  [4, 5]. Следует ожидать, что именно такие решения и будут реализовываться при численном счете или в реальных физических объектах.

Авторы выражают благодарность А. Б. Шабату и С. В. Иорданскому за ценные замечания. Работа Ю. Н. Овчинникова поддержана CRDF (USA), грант RP1-2251, а также Российским фондом фундаментальных исследований. Работа В. Л. Верещагина поддержана грантами INTAS # 99-01782 и Российского фонда фундаментальных исследований # 99-0100656, # 01-01-00931.

---

1. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **62**, 1746 (1972).

2. В. Е. Захаров, Л. Н. Щур, *ЖЭТФ* **81**, 2019 (1981), [*JETP* **54**, 1064 (1981)].
3. A. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov, *Physica* **D57**, 96 (1992).
4. Ю. Н. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 387 (1999), [*JETP Lett.* **69**, 418 (1999)].
5. Ю. Н. Овчинников, И. М. Сигал, *ЖЭТФ* **116**, 67 (1999), [*JETP* **89**, 35 (1999)].
6. P. L. Sulem, Catherine Sulem, *Nonlinear Schroedinger Equation: Self-Focusing and wave Collapse*, Springer Verlag: ISBN, 1999.
7. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *ЖЭТФ* **91**, 1310 (1986).