Письма в ЖЭТФ, том 78, вып. 9, с. 1087 – 1092 © 2003 г. 10 ноября

О кодировании квантового источника состояний с конечной частотной полосой: квантовый аналог теоремы Котельникова об отсчетах

С. Н. Молотков[1)]

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 августа 2003 г.

После переработки 30 сентября 2003 г.

Приведен пример кодирования источника квантовых состояний с конечной частотной полосой W и конечной мощностью на выходе, не превышающей $\sim (\hbar W) \cdot W$. Количество классической информации в битах, которое может быть закодировано в квантовые состояния, генерируемые таким источником, в единицу времени равно $C = W$. Такой источник является минимальным в том смысле, что число заполнения каждой ортогональной одночастичной моды во временном окне $2T$, из которых строится $N = WT$-фотонный вектор, равно 1. Данный результат можно рассматривать как квантовый аналог теоремы Котельникова об отсчетах [8] для классических сигналов, когда интенсивность сигнала доведена до однофотонного уровня. При этом квантовые состояния на выходе источника принципиально являются запутанными из-за тождественности фотонов.

PACS: 03.67.Dt, 42.50.–p, 89.70.+c

Пропускная способность канала связи является важнейшей характеристикой и определяет верхнюю границу скорости безошибочной передачи информации в асимптотическом пределе длинных последовательностей. Для классических каналов связи, когда носителями информации являются классические объекты (сигналы), пропускные способности определяются теоремами кодирования Шеннона [1]. В квантовых каналах связи носителями являются квантовые объекты, классическая информация при этом кодируется в состояния квантовых систем, которые в общем случае описываются операторами матриц плотности. Математические исследования квантовых каналов связи были начаты еще в 70-е годы в работах Холево [2]. На сегодняшний день кодирование в квантовых каналах связи является быстро развивающейся областью квантовой теории информации, в которой уже получены фундаментальные результаты по пропускным способностям [2 – 7]. Для многих ситуаций наиболее интересной величиной является пропускная способность в единицу времени. Если сам физический канал связи является идеальным, то есть передает состояния, генерируемые источником без искажений, то пропускная способность, по существу, определяется энтропией источника. Нас как раз будет интересовать такая ситуация, когда имеется источник квантовых состояний с конечной частотной полосой W, который генерирует квантовые состояния во времени и выдает их на вход идеального физического канала связи с той же частотной полосой пропускания.

Приведем сначала наводящие интуитивные соображения, затем кратко опишем классический случай, после которого перейдем к квантовому случаю. Процесс генерации состояний как классических, так и квантовых происходит во времени. Разобьем всю ось времени $(-\infty, \infty)$ на отдельные рабочие временные окна размером $2T$, разделенные "защитными" временными окнами размером $\sim T^{1-\delta}$ $(0 < \delta < 1)$. Источник с конечной частотной полосой W генерирует состояния в рабочих временных окнах $2T$. В "защитных" временных окнах источник выключен. Формально такое разбиение нужно для того, чтобы исключить перекрытие состояний (как классических, так и квантовых) между разными рабочими временными окнами. Поскольку далее нас будет интересовать случай, когда размер рабочего окна $2T$ достаточно велик, то влияние "защитных" временных интервалов при $T \to \infty$ будет стремиться к нулю $(T^{1-\delta}/T \to 0)$. После этого ситуация сводится к выяснению энтропийных свойств источника с конечной частотной полосой W в отдельном рабочем временном окне. При такой постановке задача сводится к источнику с дискретным временем, когда длитель-

[1)]e-mail: molotkov@issp.ac.ru

ность каждой и независимой от других посылок состояний в физический канал связи составляет $2T$. Если канал связи идеальный, то есть передает все поступающие на вход состояния без искажений, то предельно допустимая скорость безошибочной передачи классической информации в единицу времени (пропускная способность) будет определяться энтропией либо Шеннона для источника классических сигналов, либо энтропией фон Неймана для источника квантовых состояний[2)].

Рассмотрим кратко кодирование источника классических сигналов с конечной частотной полосой $k \leq |W|$. Далее это потребуется для сравнения с квантовым случаем. Классический сигнал с конечной частотной полосой описывается функцией времени $x(t)$. На конечном временном интервале $(-T, T)$ сигнал $x(t)$, как было показано Котельниковым [8], определяется $2WT$ степенями свободы в том смысле, что при разложении по ортогональной системе функций

$$x(t) = \sum_n x_n \theta_n(t) \tag{1}$$

достаточно ограничиться $2WT$ слагаемыми, для которых

$$\int_{-T}^{T} \theta_n(t)\theta_m(t)dt = \delta_{nm}\lambda_n(WT) \approx 1. \tag{2}$$

В работе [8] в качестве базисных функций $\theta_n(t)$ использовались так называемые отсчетные функции $(\theta_n(t) = \sin W[t - n\pi/W]/W[t - n\pi/W])$. Базис из отсчетных функций обладает тем наглядным свойством, что значения коэффициентов разложения по этому базису x_n просто равны значениям самого сигнала $x(t)$ в отсчетные моменты времени. Ниже нам будет удобнее использовать другие базисные функции, которые имеют лучшие свойства по сравнению с отсчетными функциями в смысле их локализации в конечном временном окне $(-T, T)$. Число функций, наиболее сильно локализованных в окне $(-T, T)$, при этом остается прежним. Кроме того, данные функции возникают и в квантовом случае, где они играют роль одночастичных амплитуд (волновых функций) для фотонов, которые наиболее сильно локализованы во временном окне $(-T, T)$.

Ортогональность базисных функций с носителем в конечной частотной полосе W приводит к условию

$$\int_{-T}^{T} \theta_n(t)\theta_m(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{k \leq |W|} \int\limits_{k' \leq |W|} \theta_n(k) \frac{\sin(k-k')T}{k-k'} \theta_m(k') dk dk',$$

$$\theta_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(t) \mathrm{e}^{-ikt} dt. \tag{3}$$

Базисные функции ортогональны, если они удовлетворяют следующему интегральному уравнению:

$$\lambda_n(WT)\theta_n(k) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{k \leq |W|} \frac{\sin(k-k')T}{k-k'} \theta_n(k') dk'. \tag{4}$$

Собственные числа зависят только от произведения WT и образуют бесконечную серию $1 > \lambda_1(WT) > \lambda_2(WT) > ... > 0$. Степень локализации квадрата n-функции во временном окне $(-T, T)$ определяется собственным числом

$$\int_{-T}^{T} \theta_n^2(t)dt = \lambda_n(WT). \tag{5}$$

Интегральное уравнение определяет так называемые функции вытянутого сфероида (prolate spheroidal functions) [9]. Собственные числа обладают тем замечательным свойством, что при больших $WT \gg 1$ разбиваются на две группы с номерами $n < 2WT$, для которых $\lambda_n(WT) \approx 1$, и с номерами $n > 2WT$, для которых $\lambda_n(WT) \approx 0$. Размер переходной области по номерам от одного поведения к другому равен $\approx \ln(4\pi WT)$. Более формально, для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\begin{aligned} \lim_{WT\to\infty} \lambda_{2WT(1-\varepsilon)}(WT) = 1, \\ \lim_{WT\to\infty} \lambda_{2WT(1+\varepsilon)}(WT) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

На словах это означает, что при больших WT имеется не более $2WT(1-\varepsilon)$ ортогональных (различимых) функций, вклад которых во временном окне $(-T, T)$ стремится к единице. Если использовать более чем $2WT(1+\varepsilon)$ степеней свободы, то среди них будут состояния, которые дают в этом временном окне $(-T, T)$ исчезающе малый вклад. При больших WT сигнал $x(t)$ в конечной частотной полосе на конечном временном интервале описывается не более чем $2WT$ независимыми (ортогональными и различимыми) степенями свободы и может быть задан $2WT$ независимыми коэффициентами разложения x_n.

[2)] Если говорить более аккуратно, то ответ дается функцией Холево χ, которая в нашем случае при $T \to \infty$ переходит в энтропию фон Неймана.

Если классический источник с конечной частотной полосой W генерирует сигналы, локализованные во временном окне $(-T, T)$ таким образом, что коэффициенты разложения задаются в соответствие с заданным распределением вероятностей $p(x_n)$ на множестве этих коэффициентов x_n (значений амплитуд сигнала), то энтропия источника определяется величиной

$$\begin{gathered} I(WT, p(x_n)) = 2WTH(p(x_n)), \\ H(p(x_n)) = -\sum_n p(x_n) \log p(x_n). \end{gathered} \tag{7}$$

Далее, если эти сигналы передаются через идеальный (без шума) физический канал связи, например, с той же частотной полосой пропускания W, то энтропия источника (7), по существу, совпадает со взаимной информацией между входом и выходом такого физического канала связи. Тогда пропускная способность в единицу времени (источник + физический канал связи + приемник) определяется как

$$\begin{aligned} C = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \max_{\{p(x_n)\}} I(WT, p(x_n)) = \\ = W \max_{\{p(x_n)\}} H(p(x_n)). \end{aligned} \tag{8}$$

Для сравнения классического и квантового случаев нам потребуются следующие качественные соображения. В рамках классической физики нет никаких формальных запретов изменять значение коэффициентов разложения x_n (амплитуд ортогональных базисных функций $\theta_n(t)$) со сколь угодно малой дискретностью (непрерывно). Если вспомнить, что интенсивность классического сигнала x_n^2, например, для электромагнитного поля, в каждой отдельной моде $\theta_n(t)$ представляет собой, с точностью до множителя $\approx \hbar W$, число фотонов в этой моде, то изменение уровня сигнала может происходить с конечной дискретностью. Для кодирования информации в значения x_n необходимо, по крайней мере, два значения ($x_n^2 \propto N_{\max}$, $N_{\max}$ – максимальное число возможных значений x_n^2). Полное число различных значений для всех мод есть $(\sqrt{N_{\max}})^{2WT}$. Если каждое значение выбирается с равной вероятностью, то энтропия источника (7) равна

$$I(WT, p(x_n)) = 2WT \log(\sqrt{N_{\max}}). \tag{9}$$

Пропускная способность (8) в единицу времени при минимальном уровне сигнала ($N_{\max} = 2$) есть

$$C = W. \tag{10}$$

Строго говоря, применять формулы для классического случая, когда заполнение мод мало, нельзя.

Далее нас будет интересовать пропускная способность в однофотонном режиме. Приведенные рассуждения будут нужны для качественного сравнения классического и квантового случаев. Наша задача будет фактически сводиться к подсчету числа возможных ортогональных многофотонных состояний для источника с конечной частотной полосой W и локализованных во временном окне $(-T, T)$. Рассмотрим сначала однофотонные состояния на выходе источника, которые затем распространяются в одном направлении ($k > 0$), и имеют носитель в конечной частотной полосе W ($k \in [0, W]$). Будем игнорировать поляризационные степени свободы, имея в виду кодирование в различные формы амплитуд состояний, опять для более близкой аналогии с классическим случаем. Далее для краткости положим $c = \hbar = 1$. Имеем

$$|\varphi^e\rangle = \int_0^W \frac{dk}{k} \varphi(k, k_0 = |k|) a^+(k)|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(\tau)|\tau\rangle, \tag{11}$$

$\varphi(k, k)$ ($k > 0$) и $\varphi(\tau)$ – амплитуды однофотонного пакета в импульсном и пространственно-временном представлении, соответственно,

$$\begin{gathered} \varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^W \frac{dk}{\sqrt{k}} \mathrm{e}^{-ik\tau} \varphi(k, k), \\ |\tau\rangle = \int_0^W \frac{dk}{\sqrt{k}} \mathrm{e}^{ik\tau} |k\rangle, \quad |k\rangle = a^+(k)|0\rangle. \end{gathered} \tag{12}$$

Для безмассового поля $\tau = x - t$ зависит лишь от разности координаты и времени, что отражает тот факт, что если результат измерения имел место в окрестности точки x в момент времени t, то такой же результат может быть получен в точке x' в момент $t' = t + (x' - x)$. Далее для краткости будем говорить о временном окне, имея в виду, что $(-T, T)$ означает $(-(x - t), (x - t))$.

Нам потребуется выбрать амплитуду (волновую функцию) однофотонного пакета с носителем в конечной частотной полосе W так, чтобы от нее набиралась максимальная нормировка в пространственно-временной области – окне $(-T, T)$. Формально степень локализации описывается измерением в этом окне. Любое измерение над однофотонным пакетом во временном окне описывается разложением единицы в одночастичном подпространстве, которое имеет вид

$$I^{(1)}=\int\limits_{0}^{W}\frac{dk}{k}|k\rangle\langle k|=I^{(1)}(T)+I^{(1)}(\overline{T})=$$
$$=\int\limits_{-T}^{T}\frac{d\tau}{2\pi}|\tau\rangle\langle\tau|+\int\limits_{-(\infty,\infty)/(-T,T)}\frac{d\tau}{2\pi}|\tau\rangle\langle\tau|. \qquad (13)$$

С учетом (12), (13) оператор, сопоставляемый временному окну $(-T,T)$, представляется в виде

$$I^{(1)}(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(WT)|\theta_n\rangle\langle\theta_n|,$$
$$|\theta_n\rangle=\int\limits_{0}^{W}\frac{dk}{k}\theta_n(k)|k\rangle. \qquad (14)$$

Сами функции $\theta_n(k)$ являются собственными функциями интегрального уравнения (4) с той лишь разницей, что интегрирование ведется по отрезку $[0,W]$. Число функций, локализованных во временном окне $(-T,T)$ будет WT. По сути, векторы $|\theta_n\rangle$ являются собственными векторами оператора $I^{(1)}(T)$, в базисе этих векторов оператор диагонален. Любое измерение над исходным состоянием, когда доступны исходы лишь во временном окне, эквивалентно измерениям над следующей эффективной матрицей плотности:

$$\rho(T)=\sum_{n,n'}\lambda_n(WT)\lambda_{n'}(WT)|\theta_n\rangle\langle\theta_n|\varphi\rangle\langle\varphi|\theta_{n'}\rangle\langle\theta_{n'}|+$$
$$+\mathrm{Tr}\{I^{(1)}(\overline{T})|\varphi\rangle\langle\varphi|\}|?\rangle\langle?|. \qquad (15)$$

Здесь введено формальное состояние $|?\rangle$, которое ортогонально всем состояниям и которое описывает исходы вне временного окна. Такие исходы отвечают ситуации, когда внутри окна вообще не было срабатывания аппаратуры. Эффективная матрица плотности имеет единичный след с учетом таких исходов, которым должен быть приписан неопределенный (inconclusive) результат. При больших WT можно выбрать одно из WT ортогональных (различимых) однофотонных состояний, которое с вероятностью, сколь угодно близкой к единице ($\lambda_n(WT)\approx 1$), локализовано в окне $(-T,T)$ и которое имеет эффективную матрицу плотности в этом окне:

$$\rho_n(T)=\lambda_n(WT)|\theta_n\rangle\langle\theta_n|+(1-\lambda_n(WT))|?\rangle\langle?|,$$
$$1\le n\le WT. \qquad (16)$$

Пусть источник генерирует в рабочем временном окне $N=WT$-фотонные состояния вида

$$|\theta_{n_1};...\theta_{n_N}\rangle=$$
$$=\int\limits_{0}^{W}...\int\limits_{0}^{W}\frac{k_1}{k_1}...\frac{dk_N}{k_N}\theta_{n_1}(k_1)...\theta_{n_N}(k_N)|k_1,...k_N\rangle,$$
$$|k_1,...k_N\rangle=a^+(k_1)...a^+(k_N)|0\rangle. \qquad (17)$$

Обобщенные базисные векторы, которые полностью симметричны по перестановкам частиц,

$$|k_1,...,k_N\rangle=$$
$$=\sqrt{\frac{k_1,k_2\dots k_N}{N!}}\sum_{\{j\}}\delta(k_1-q_{j_1})....\delta(k_N-q_{j_N}), \qquad (18)$$

символ $\{j\}$ означает, что суммирование происходит по всем перестановкам. Сконструируем теперь $N=WT$-фотонные матрицы плотности. Число заполнения каждой одночастичной моды при этом равно 1. Множество векторов в (17) с различными индексами образует собственные векторы оператора $I^{(N)}(T)$ в $N=WT$-фотонном подпространстве, аналогично однофотонному случаю. Имеем

$$I^{(N)}=\int\limits_{0}^{W}...\int\limits_{0}^{W}\frac{dk_1}{k_1}...\frac{dk_N}{k_N}|k_1,...k_N\rangle\langle k_1,...k_N|=$$
$$I^{(N)}(T)+I^{(N)}(\overline{T}), \qquad (19)$$

$$I^{(N)}(T)=\int\limits_{-T}^{T}...\int\limits_{-T}^{T}\frac{d\tau_1}{2\pi}...\frac{d\tau_N}{2\pi}|\tau_1;...\tau_N\rangle\langle\tau_1;...\tau_N|=$$
$$=\sum_{n_1,...n_N=1}^{\infty}\lambda_{n_1}(WT)\cdot$$
$$\cdot\lambda_{n_N}(WT)|\theta_{n_1};...\theta_{n_N}\rangle\langle\theta_{n_1};...\theta_{n_N}|. \qquad (20)$$

Подсчитаем число ортогональных $N=WT$-фотонных состояний[3)]. Если бы $N=WT$ фотонов были бы различимыми, то число ортогональных $N=WT$-фотонных векторов в окне $(-T,T)$ и локализованных в нем с вероятностью почти единица, было бы N^N (без учета поляризационных степеней свободы). Из-за принципа тождественности бозонов (фотонов) число таких векторов, которое обозначим для удобства как $2^{M(WT)}$, равно числу способов

[3)] В этом месте автор хотел бы поблагодарить рецензента за замеченную им ошибку в исходной версии работы.

размещения $N = WT$ тождественных частиц по $N = WT$ состояниям; имеем [10]

$$2^{M(WT)} = \frac{(N+N-1)!}{(N-1)!N!}, \quad N = WT, \tag{21}$$

при больших N с учетом формулы Стирлинга ($N! \approx \approx (N/e)^N\sqrt{2\pi N}$) имеем

$$\log 2^{M(WT)} = 2N\log 2 = 2WT. \tag{22}$$

Пусть в каждом рабочем временном окне источник генерирует с равной вероятностью одно из $2^{M(WT)}$ ортогональных $N = WT$-фотонных состояний. Если источник работает достаточно долго, то статистический ансамбль, в который может быть закодирована классическая информация, описывается матрицей плотности

$$\rho(M(WT)) = \frac{1}{2^{M(WT)}} \sum_{n_1,\ldots n_N} |\theta_{n_1};\ldots\theta_{n_N}\rangle\langle\theta_{n_1};\ldots\theta_{n_N}|. \tag{23}$$

Максимальная фон-неймановская энтропия ансамбля достигается при равновероятном выборе векторов. Информация в конечном временном окне $(-T,T)$ извлекается из эффективной матрицы плотности

$$\rho(T) = \frac{1}{2^{M(WT)}} \sum_{n_1,\ldots n_N} \lambda_{n_1}(WT)\cdot\ldots\cdot\lambda_{n_N}(WT) \times$$
$$\times |\theta_{n_1};\ldots\theta_{n_N}\rangle\langle\theta_{n_1};\ldots\theta_{n_N}| + \tag{24}$$
$$+\frac{1}{2^{M(WT)}} \sum_{n_1,\ldots n_N} (1-\lambda_{n_1}(WT)\cdot\ldots\cdot\lambda_{n_N}(WT))|?\rangle\langle ?|.$$

При больших WT нельзя сконструировать статистический ансамбль, построенный из более чем $2^{M(WT)}$ ортогональных $N = WT$-фотонных состояний. Классическая информация, которая может быть закодирована в ансамбль $\rho(M(WT))$ и извлечена из $\rho(T)$ (24), дается величиной $\chi(\rho(T))$, следующей из неравенства Холево [2]. Поскольку состояния $|\theta_{n_1};\ldots\theta_{n_N}\rangle$ и $|?\rangle$ являются чистыми, то $\chi(\rho(T))$ совпадает с энтропией фон Неймана для $\rho(T)$; имеем

$$\chi(\rho(T)) = -\mathrm{Tr}\{\rho(T)\log\rho(T)\} =$$
$$= -\sum_{n_1,\ldots n_N} \frac{\lambda_{n_1}(WT)\cdot\ldots\cdot\lambda_{n_N}(WT)}{2^{M(WT)}} \times$$
$$\times \log\left(\frac{\lambda_{n_1}(WT)\cdot\ldots\cdot\lambda_{n_N}(WT)}{2^{M(WT)}}\right) -$$
$$-\sum_{n_1,\ldots n_N} \left(\frac{1-\lambda_{n_1}(WT)\cdot\ldots\cdot\lambda_{n_N}(WT)}{2^{M(WT)}}\right) \times$$
$$\times \log\left(\frac{1-\lambda_{n_1}(WT)\cdot\ldots\cdot\lambda_{n_N}(WT)}{2^{M(WT)}}\right). \tag{25}$$

Пропускная способность в единицу времени определяется пределом, который аналогичен формуле (8) для классического случая. С учетом того, что вклад второй суммы в (25) стремится к нулю, имеем

$$C = \lim_{T\to\infty} C_T,$$
$$C_T = \frac{\log(2^{M(WT)})}{2T} = \frac{M(WT)}{2T} = W. \tag{26}$$

Источник генерирует во временном окне $N = WT$-фотонные состояния так, что число фотонов на выходе источника в единицу времени $\sim W$ и энергия на один фотон $\sim \hbar W$. Соответственно, число фотонов во временном окне $(-T,T)$ равно WT (именно число, а не среднее число фотонов, поскольку состояния $|\theta_{n_1};\ldots\theta_{n_N}\rangle$ в (23) являются собственными векторами оператора числа фотонов, отвечающих собственному числу частиц $N = WT$)[4)]. Мощность на выходе источника постоянна и равна $\sim (\hbar W)\cdot W$. Минимальность источника в квантовом случае означает, что число ортогональных одночастичных амплитуд $\theta_n(t)$, из которых строится симметричная по перестановкам частиц $N = WT$-фотонная амплитуда, равно WT, и число фотонов равно WT, то есть число заполнения в пересчете на отдельную одночастичную амплитуду равно 1. Если сравнивать пропускную способность в классическом случае (10), когда уровень сигнала доведен до однофотонного уровня, то "буквенно" она совпадает с пропускной способностью в квантовом случае (26). Однако описывать сигнал малой интенсивности классическим образом нельзя. Способы кодирования в классическом и квантовом случаях также различны. В классическом случае информация кодируется в значения амплитуд (грубо в число фотонов) в ортогональных модах. В квантовом же случае информация кодируется в различные ортогональные многофотонные состояния. Последние из-за тождественности фотонов принципиально являются запутанными внутри каждого временного окна $2T$. Такое кодирование квантового источника можно рассматривать как квантовый аналог теоремы Котельникова об отсчетах, когда числа заполнения одночастичных мод доведены до однофотонного уровня.

Автор благодарит А.С.Холево, Ю.И.Ожигова и С.В.Иорданского за плодотворные обсуждения и замечания, которые позволили улучшить работу. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект # 02-02-16289), а также проектами # 40.020.1.1.1170 и # 37.029. 1.1.0031.

4) Строго говоря, всюду под WT нужно понимать целую часть – $[WT]$.

1. C. E. Shannon, Bell Syst. Tech. Jour., **27**, 397, 623 (1948).
2. А. С. Холево, Проблемы передачи информации **8**, 63 (1972); **15**, 3 (1979); Успехи математических наук **53**, 193 (1998).
3. А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, серия *Современная математическая физика, вып.5*, Из-во: МЦНМО, Москва, 2002.
4. R. Jozsa and B. Schumacher, J. Mod. Optics. **41**, 2343 (1994).
5. P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher et al., Phys. Rev. **A54**, 1869 (1996).
6. B. Schumacher and M. D. Westmoreland, Phys. Rev. **A56**, 131 (1997).
7. C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin, and A. V. Thapliyal, Phys. Rev. Lett., **83**, 3081 (1999); C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin, and A. V. Thapliyal, quant-ph/9904023.
8. В.А.Котельников, *О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи*, Всесоюз. энерг. комиссия, материалы к Первому Всес. съезду по вопросам реконстр. дела связи и разв. слаботочной промыш., 1933.
9. D. Slepian, J. Math. and Phys., **44**, 99 (1965).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч.1, т.V, М.: Наука, 1995.