Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 6, стр. 217 – 219 *25 сентября 1984 г.*

ГЕНЕРАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКЕ

А.С.Пиковский

Численно изучается вопрос о хаотизации волнового поля, возбуждаемого точечным периодическим источником в согласованной линии, моделирующей полубесконечную нелинейную цепочку. Показано, что при достаточно большой амплитуде источника происходит излучение практически полностью стохастических волн.

К настоящему времени подробно изучены хаотические колебания в нелинейных системах с небольшим числом степеней свободы [1]. Сформулированные здесь представления позволили рассмотреть также некоторые задачи, связанные с хаотизацией нелинейных волновых полей. Однако обсуждавшиеся здесь ситуации (хаотические стационарные волны [2]; волны, хаотические только в пространстве [3], либо только во времени [1,4]; хаотические режимы в распределенных ограниченных системах [5,6]) принципиально не отличаются от сосредоточенных моделей. В настоящей статье описывается хаотизация волнового поля в системе, в которой моделируется бесконечное число степеней свободы.

Рассмотрим полубесконечную нелинейную среду, на границе которой действует периодический внешний источник. К подобной постановке задачи приводит, например, исследование воздействия стационарных интенсивных электромагнитных волн на плазму, распространения лазерного излучения в кристаллах и др. В качестве конкретной модели для численного исследования была взята нелинейная цепочка, описываемая гамильтонианом

$$H(p_i, q_i, t) = q_1 A \cos\omega_0 t + \frac{1}{2}\sum_{i \geqslant 1}\left[p_i^2 + q_i^2 + \frac{1}{2}q_i^4 + D(q_i^2 - q_{i-1}^2)\right] \qquad (1)$$

с граничным условием $q_0 = q_1$. Первое слагаемое в гамильтониане отвечает внешней силе с частотой ω_0 и амплитудой A, приложенной на границе $i = 1$. Гамильтониан (1) является дискретным аналогом известного в теории поля гамильтониана "ϕ^4", приводящего к нелинейному уравнению Клейна – Гордона. Спектр линейных волн в цепочке (1) сплошной :

$$\omega^2(k) = 1 + 2D(1 - \cos k), \quad 0 \leqslant k \leqslant \pi .$$

Для имитации в расчетах полубесконечной среды к ограниченному отрезку цепочки ($1 \leqslant i \leqslant N$) добавлялось несколько элементов, в которые вводилось затухание. В результате распространяющиеся в области $i > N$ волны затухали и отражения практически не было (линейный коэффициент стоячей волны менее 3%). Описанный прием наглядно показывает, что "с точки зрения источника" бесконечную консервативную среду можно рассматривать как диссипативную. В частности, установившийся режим не зависит от начальных условий.

Основные численные эксперименты проводились при $N = 150, D = 20, \omega_0 = 2\pi/3$; изменялась амплитуда внешней силы A. При малых значениях A ($A \lesssim 30$) в цепочке устанавливалась бегущая периодическая волна. При $30 \lesssim A \lesssim 70$ наблюдается режим слабой стохастизации. Вблизи границы $i = 1$ возбуждалась периодическая волна. В процессе распространения периодичность нарушалась и возникала хаотическая компонента. По мере распространения в результате взаимодействия регулярной волны с шумом (хаотической компонентой) интенсивность последнего растет [7]. Можно ожидать, что вдали от источника (при $i \to \infty$) происходит полная хаотизация волнового поля – вся энергия переходит в хаотическую компоненту. При $A \gtrsim 70$ ситуация другая. Здесь хаотизация колебаний происходит уже в ближнем поле источника. В результате на небольшом расстоянии от источника формируется почти полностью хаотизованное волновое поле. Сказанное иллюстрирует рис. 1, на котором представлено распределение доли сплошного спектра в полной мощности процесса вдоль системы.

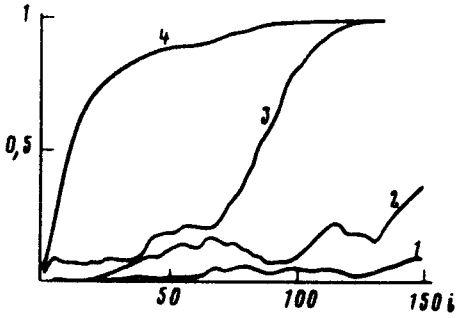

Рис. 1

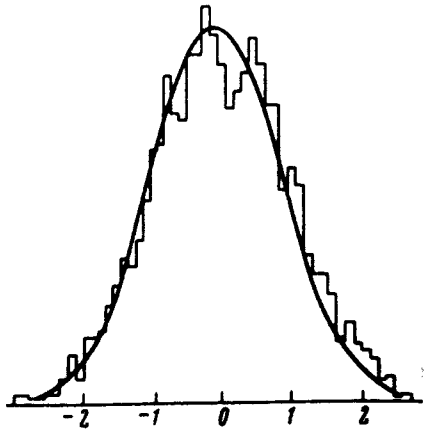

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 3. Спектр мощности колебаний 140-го элемента цепочки при $A = 75$

Рис. 1. Распределение вдоль цепочки относительной доли сплошной компоненты в спектре колебаний частиц: *1* – $A = 25$; *2* – $A = 40$; *3* – $A = 65$; *4* – $A = 75$

Рис. 2. Гистограмма смещений 140-го элемента цепочки при $A = 75$. Кривая – нормальное распределение с теми же средним и дисперсией

Обсудим вкратце статистические свойства возбуждаемых в цепочке хаотических волн. На рис. 2 представлена функция распределения смещений цепочки в точке $i = 140$ при $A = 75$. Видно, что это распределение довольно близко к нормальному. Спектр мощности колебаний в той же точке изображен на рис. 3. Спектр сплошной и примерно постоянен в диапазоне $\omega_0 < \omega < \omega_m$, где ω_0 – частота внешней силы, а $\omega_m = \sqrt{1 + 4D} = 9$ – максимальная частота линейных волн. Эти данные можно интерпретировать следующим образом: энергия источника равномерно распределяется между волновыми компонентами, лежащими в полосе прозрачности цепочки, и эти волны можно считать независимыми.

Основные результаты работы сводятся к следующему. На примере цепочки нелинейных осцилляторов показано, что при возбуждении точечным источником бесконечной нелинейной среды могут генерироваться хаотические волны. Можно выделить два типа стохастиза-

ции волн. Первый – хаотизация в процессе распространения. Этот тип стохастизации, по-видимому, не работает, если нелинейная среда описывается интегрируемыми уравнениями, либо если волны достаточно быстро убывают от источника (из-за затухания или вследствие расходимости в двумерной или трехмерной среде). Второй, гораздо более эффективный, но проявляющийся при больших амплитудах тип стохастизации – хаотизация колебаний непосредственно в области ближнего поля вокруг источника. При этом в среду распространяются волны, спектр которых содержит сплошную компоненту. В процессе распространения из-за нелинейного взаимодействия интенсивность шумовой компоненты растет, и на большом расстоянии от источника наблюдается практически полностью случайное шумовое поле.

Автор благодарит М.И.Рабиновича за полезные замечания.

Литература

1. *Рабинович М.И.* УФН, 1978, 125, 123.
2. *Gorzhkov K.A. et. al.* Phys. Lett., 1979, A74, 177.
3. *Pikovsky A.S.* Phys. Lett., 1980, A80, 367.
4. *Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л.* Письма в ЖЭТФ, 1981, 34, 171.
5. *Горшков К.А., Островский Л.А., Папко В.В.* ДАН СССР, 1977, 235, 70.
6. *Захаров В.Е., Иванов М.Ф., Щур Л.Н.* Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, 39.
7. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 апреля 1984 г.