Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 6, стр. 265 – 268 *25 сентября 1984 г.*

ДЕ СИТТЕРОВСКОЕ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ВСЕЛЕННОЙ КАК РЕЗУЛЬТАТ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИСЧЕЗНОВЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ МАТЕРИИ

М.А.Марков, В.Ф.Муханов

Предполагается, что в "эффективном" действии для гравитационного поля и материи "константа" связи между веществом и гравитацией является функцией плотности энергии. В этом случае в уравнениях Эйнштейна автоматически появляется Λ-образный член. Рассматривается при каких условиях начальное состояние Вселенной оказывается де Ситтеровским.

В ряде работ [1 - 4] были рассмотрены написанные "ad hoc" модифицированные уравнения Эйнштейна, которые при больших плотностях энергии описывают мир де Ситтера Планковских размеров. В цитированных работах уравнения не были получены из вариационного принципа. Здесь мы покажем, что гидродинамические уравнения, аналогичные рассмотренным в [1 - 4], которые эффективно могут описывать Вселенную в ранние моменты времени, получаются из действия

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_0}\int (R + 2\kappa\epsilon)\sqrt{-g}\, d^4x\,, \tag{1}$$

если предположить, что κ является функцией плотности энергии ϵ: $\kappa \equiv \kappa(\epsilon)$. Зависимость κ от ϵ возможно результативно описывает физические процессы при планковских плотностях [5]. Варьируя действие (1) по метрике g_{ik} получаем уравнения вида:

$$R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k R = G(\epsilon)\widetilde{T}^i_k + \Lambda(\epsilon)\,\delta^i_k\,. \tag{2}$$

Здесь $\widetilde{T}^i_k = (\epsilon + p)\,u^i u_k - p\delta^i_k$, и функции $G(\epsilon)$ и $\Lambda(\epsilon)$ соответственно выражаются через $\kappa(\epsilon)$:

$$G(\epsilon) = \epsilon\frac{\partial\kappa}{\partial\epsilon} + \kappa\,, \quad \Lambda(\epsilon) = -\,\epsilon^2\,\frac{\partial\kappa}{\partial\epsilon}\,. \tag{3}$$

При варьировании действия (1) мы использовали методику Фока [6], введя частицы с плотностью n, удовлетворяющей уравнению непрерывности: $(nu^i)_{;i} = 0$ [1)].

В общем случае, при произвольной функции $\kappa(\epsilon)$ тензор энергии-импульса, полученный из действия (1), содержит Λ-образный член. Этот член равен нулю в том и только в том случае, когда обсуждаемое действие совпадает с действием Эйнштейна – Фока, т. е., при $\kappa =$ $=$ const.

Функция $\psi(\epsilon) = c^4\kappa(\epsilon)/8\pi G_0$ должна быть функцией от безразмерной плотности энергии $x = \epsilon/\epsilon_0$, где единственный кандидат на роль ϵ_0 – это планковская плотность.

В рассматриваемых теориях [1 - 4] ограниченность $G(\epsilon)\widetilde{T}^i_k$ принимается как фундаментальный закон во всех вариантах обсуждаемой концепции [1]. В ряде случаев из уравнений вытекает ограниченность плотности "энергии" ϵ. Такое обстоятельство, например, имеет место в модели [3] для замкнутой изотропной Вселенной. Но, видимо, нет никаких причин в рамках данного формализма исключать случай $\epsilon \to \infty$, если при этом можно удовлетворить условию $G(\epsilon)\widetilde{T}^i_k <$ const.

В соответствии с идеями, изложенными в [1 - 4], наша задача будет состоять в получении варьированием обобщенного действия (1) модифицированных уравнений (2), которые в

[1)] Образно говоря, частицы не исчезают в процессе коллапса, а каждая из частиц становится все более и более "бесплотной" (меньшей массы).

случае больших ϵ описывают мир сколь угодно близкий к миру де Ситтера. Результат сформулируем в виде теоремы: если $G(\epsilon)$ в уравнениях (2) положительна при любых ϵ и при $\epsilon \to \infty$, $G(\epsilon)\epsilon \to 0$, то однородная изотропная замкнутая Вселенная при больших плотностях описывается решением сколь угодно близким к де ситтеровскому. Условие $G(\epsilon)\epsilon \to 0$ при $\epsilon \to \infty$ в некотором смысле означает свойство асимптотического вырождения гравитационных взаимодействий материи. Заметим, что при выполнении естественного требования $G(\epsilon) \geqslant 0$ при любых ϵ, невозможно обеспечить одновременное убывание до нуля величин $G(\epsilon)\epsilon$ и $\Lambda(\epsilon)$ при возрастании ϵ.

Перейдем теперь к доказательству приведенной выше теоремы. Прежде всего заметим, что функции $G(\epsilon)$ и $\Lambda(\epsilon)$ связаны следующим образом

$$\Lambda(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} G(\epsilon)\,d\epsilon - G(\epsilon)\epsilon \qquad (4)$$

Поскольку $G(\epsilon)\epsilon \to 0$ при $\epsilon \to \infty$ и $G(\epsilon) > 0$, из (4) следует, что при возрастании плотности ϵ, Λ-образный член стремится к постоянной величине, равной $\int_0^{\infty} G(\epsilon)d\epsilon$.

Рассмотрим изотропную замкнутую Вселенную с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}\ , \qquad (5)$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$ – метрика трехмерного пространства постоянной положительной кривизны. Уравнения движения для вещества получаются из условий $T^{i}_{k;\,i} = 0$, которые являются следствием тождеств Бианки. В изотропной Вселенной с метрикой (5) уравнение $(G(\epsilon)\widetilde{T}^{i}_{0} + \Lambda(\epsilon)\delta^{i}_{0})_{;\,i} = 0$ имеет вид

$$d\epsilon = -\,3(p + \epsilon)d\ln a. \qquad (6)$$

Действие (1) записывается следующим образом

$$S = -\frac{3\pi c^4}{4G_0}\int\left[\dot{a}^2 a - a + \frac{a^3}{3}\int_0^{\epsilon} G(\epsilon)d\epsilon\right]dt\ . \qquad (7)$$

Соответствующий гамильтониан получается в виде

$$\mathcal{H} = -\frac{G_0}{3\pi c^4}\frac{P^2}{a} + \frac{3\pi c^4 a}{4G_0}\left(-V(a) - 1\right), \qquad (8)$$

где $P = -\dfrac{3\pi c^4}{2G_0}a\dot{a}$, и потенциал $V(a)$ есть

$$V(a) = -\frac{a^2}{3}\int_0^{\epsilon(a)} G(\epsilon)d\epsilon\,. \qquad (9)$$

Для того, чтобы найти эволюцию масштабного фактора a воспользуемся, наряду с (6), $0-0$ компонентой уравнений Эйнштейна, сводящейся к условию на гамильтониан $\mathcal{H}$: $\mathcal{H} = 0$

$$\dot{a}^2 + V(a) = -\,1. \qquad (10)$$

Таким образом, наша задача эквивалентна задаче о движении частицы с энергией -1 в поле с потенциалом $V(a)$. Далее мы увидим, что здесь в отличие от [7] существует всего одна разрешенная область движения. В качестве примера рассмотрим пыль с $p = 0$. Тогда из (6) получаем: $\epsilon = c/a^3$. Найдем потенциал $V(a)$ в асимптотиках $(\epsilon \to 0, \epsilon \to \infty)$ для широкого класса функций $G(\epsilon)$, удовлетворяющих приведенным выше условиям. Определим a_{min} и a_{max} (соответственно минимальный и максимальный радиусы Вселенной) из условия $\dot{a}_{\substack{min\\max}} = 0$ или эквивалентно

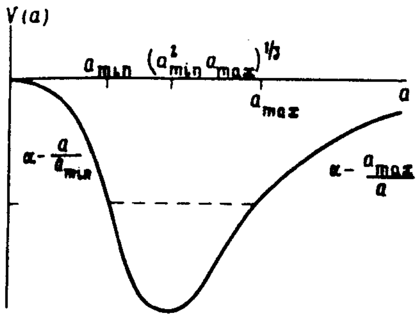
$$V(a_{\substack{min\\max}}) = -\,1. \qquad (11)$$

При $\epsilon << \epsilon_0 \sim \epsilon_{Pl}$ (рудиус Вселенной при $\epsilon \sim \epsilon_{Pl}$ равен $a \sim (a^2_{min} a_{max})^{1/3}$ [3]), $G(\epsilon) \simeq$ $\simeq 8\pi G_0/c^4$ и интеграл в (19) равен $\int_0^\epsilon G(\epsilon) d\epsilon \simeq (8\pi G_0/c^4)\,\epsilon(a)$. Отсюда с учетом (11) получаем

$$V(a) \simeq -\frac{a_{max}}{a}, \qquad a >> (a^2_{min} a_{max})^{1/3}.$$

Соответственно, при $\epsilon >> \epsilon_{Pl}$, $\int_0^\epsilon G(\epsilon) d\epsilon \sim \frac{8\pi G_0}{c^4}\epsilon_{Pl} \sim \mathrm{const}$ и

$$V(a) \approx -\left(\frac{a}{a_{min}}\right)^2, \qquad a << (a^2_{min} a_{max})^{1/3}.$$



Потенциал $V(a)$ в зависимости от масштабного фактора a

Потенциал $V(a)$ схематически изображен на рисунке. Очевидно, что при $\epsilon << \epsilon_{Pl}$ Вселенная будет эволюционировать подобно фридмановскому миру, заполненному обычной пылью, а при $\epsilon >> \epsilon_{Pl}$ она будет описываться решением де Ситтера. В качестве примера найдем, чему равен радиус a_{min} для $G(\epsilon) = (8\pi G_0/c^4)(1 + \epsilon/\epsilon_{Pl})^{-2}$. В этом случае уравнение (11) выглядит следующим образом:

$$\frac{8\pi G_0}{3c^2} a^2_{\substack{min\\max}} \frac{M m_{Pl}}{M l^3_{Pl} + m_{Pl} a^3_{\substack{min\\max}}} = 1, \qquad (12)$$

где M – полная масса Вселенной. При $Ml^3 >> m_{Pl} a^3$ получаем $a_{min} \sim \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, l_{Pl}$. Другими словами, при полной массе пылевидной Вселенной много больше планковской массы отскок Вселенной происходит, когда она в процессе коллапса сокращается до планковских размеров. Близость к планковским размерам определяется полной массой пыли Вселенной [3]. Конечное состояние коллапсирующей Вселенной в то же время является начальным состоянием последующего цикла расширения. В свою очередь, проблемы вечно осциллирующей Вселенной возможно разрешимы при учете квантовых флуктуаций в момент остановки коллапса на минимальном радиусе Вселенной [3].

В заключение заметим, что возможность избежания сингулярности в рассмотренном случае связана с нарушением условия энергодоминантности при высоких плотностях. Как показано в [3] к этому может привести зависимость массы частиц от плотности энергии. Возможно, модификация действия (1) обусловлена теми же самыми причинами.

Литература

1. *Марков М.А.* Письма в ЖЭТФ, 1982, 36, 214.
2. *Markov M.A.* Phys. Lett., 1983, 94A, 427.
3. *Markov M.A.* "Problems of Perpetually Oscillating Universe", 1983, Preprint P-0286 of Inst. for Nucl. Research Acad. of Sci. of USSR.

4. *Aman E.G., Markov M.A.* "Oscillating Universe in the Case Prepr. P-20290 of Inst. for Nucl. Research Acad. of Sci. of USSR.

5. *Березин В.А., Марков М.А.* 1984, Препринт ИЯИ АН СССР.

6. *Фок В.А.* "Теория пространства, времени и тяготения", 1955, Гос. издат. тех.-теор. литер.

7. *Hartle I.B., Hawking S.W.* "Wave Function of the Universe", 1983, Preprint.

Институт ядерных исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 августа 1984 г.