

Пространственная зависимость частотного спектра вращающегося оптического пучка

М. В. Васнецов¹⁾, В. А. Пасько, М. С. Соскин

Институт физики НАН Украины, 03028 Киев, Украина

Поступила в редакцию 25 апреля 2005 г.

За счет ротационного эффекта Доплера вращающийся оптический пучок, смещенный относительно оси вращения, становится полихроматическим. Рассмотрен случай исходного пучка в виде суперпозиции двух мод Лагерра–Гаусса как несущего элементарное изображение в виде асимметричного распределения интенсивности. Найдено пространственное распределение монохроматических компонент в поперечном сечении пучка.

PACS: 42.15.Dp, 42.25.Fx

В монохроматическом оптическом пучке, например низжайшей поперечной моде излучения лазера (гауссов пучок), частота колебаний не зависит от пространственной координаты в поперечном сечении пучка. Однако если пучок привести во вращение с помощью отклоняющего элемента (при этом пучок совершает в пространстве движение по конической или цилиндрической поверхности), за счет ротационного эффекта Доплера (РЭД) возникнет расщепление оптической частоты в симметричный спектр [1]. Величина расщепления между соседними компонентами спектра равна частоте вращения отклоняющего элемента Ω , то есть вокруг оптической частоты ω в спектре появляются компоненты с частотами $\omega \pm \Omega, \pm 2\Omega, \pm 3\Omega, \dots$ Природа РЭД связана с наличием орбитального углового момента (ОУМ) [2] у пучков с геликоидальным волновым фронтом, в которых зависимость фазы от азимутального угла φ имеет вид $m\varphi$, где m – целое (орбитальное число) [3]. В пересчете на единичный фотон ОУМ имеет квантованное значение $m\hbar$ [4]. В оптическом диапазоне РЭД был зарегистрирован при преобразовании гауссова пучка в пучок с подобной фазовой зависимостью на вращающейся спиральной зонной пластинке [5]. Поскольку отклоненный от оси вращения пучок может быть представлен в виде суперпозиции осевых азимутальных гармоник, то в результате вращения пучка каждая из них приобретает соответствующий частотный сдвиг.

Азимутальные гармоники являются решениями скалярного волнового уравнения в параксиальном приближении, например в виде мод Лагерра–Гаусса (ЛГ). Особенностью спектра РЭД является то, что его вид зависит от радиальной координаты, измере-

мой от оси вращения, поскольку каждая из гармоник имеет свое радиальное распределение амплитуды, и ее вклад в измеряемый спектр определяется радиальным положением точки измерения [6].

В настоящем сообщении рассмотрена азимутальная зависимость спектра РЭД вращающегося смещенного пучка. Рассматриваемый пучок взят в виде суперпозиции двух ЛГ-мод с исходно ненулевым ОУМ одной из компонент. Отметим, что спектр РЭД для подобного пучка (но без смещения от оси вращения) был экспериментально измерен в [6].

Вращение пучка показано схематически на рис.1. Пучок смещается параллельно самому себе при прохождении через наклоненную прозрачную плоскопараллельную пластину. Вращение пластины вокруг оси падающего пучка приводит к движению прошедшего пучка по цилиндрической поверхности. Аналогичная схема показана для варианта с отражением пучка в оптическом элементе, который осуществляет смещение и вращение пучка.

Параллельное смещение пучка (ЛГ-моды) в ее перетяжке запишется в виде преобразования

$$E(x, y) = E_{LG} \left[\frac{(x - x_0) + i(y - y_0)}{w_0} \right]^l \times \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{w_0^2} \right], \quad (1)$$

где E_{LG} – амплитудный параметр моды, l – азимутальный индекс моды, w_0 – размер поперечного сечения пучка в перетяжке, x_0 и y_0 – координаты смещения оси пучка. В полярных координатах (ρ, φ) получим после разложения экспоненциального члена

$$E(\rho, \varphi) = \frac{E_{LG}}{w_0^l} (\rho e^{i\varphi} - \delta e^{i\theta})^l \exp \left(-\frac{\rho^2 + \delta^2}{w_0^2} \right) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m \left(\frac{2\rho\delta}{w_0^2} \right) \exp [im(\varphi - \theta)], \quad (2)$$

¹⁾e-mail: mvas@iop.kiev.ua

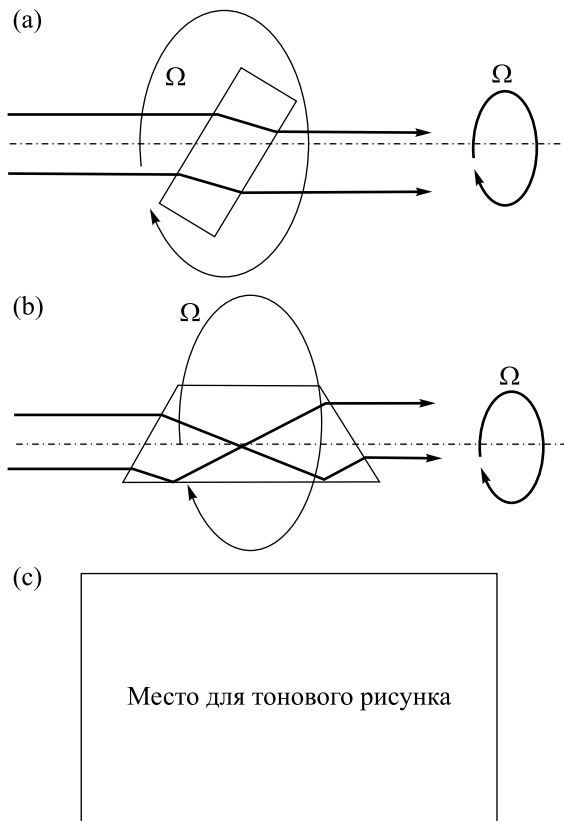


Рис.1. Схемы вращения оптического пучка с помощью оптического элемента: (а) при параллельном смещении, без отражения; (б) при параллельном смещении и отражении; (с) для суперпозиции гауссова пучка и LG_0^1 -моды распределение интенсивности в поперечном сечении пучка имеет вид внеосевого провала, в котором локализован оптический вихрь

где $\delta = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$ – величина параллельного смещения пучка, θ – азимутальное направление смещения, I_m – модифицированная функция Бесселя целого порядка m [7].

Для анализа частотного спектра вращающегося пучка представим его в виде суперпозиции осевых компонент:

$$E(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{ml}(\rho, \delta) \exp[i m \varphi - i(m-l)\theta], \quad (3)$$

где каждая из компонент представляет собой азимутальную гармонику (C_l^m – биномиальный коэффициент):

$$A_{ml}(\rho, \delta) = \frac{E_{LG}}{w_0^l} \exp\left(-\frac{\rho^2 + \delta^2}{w_0^2}\right) \times \sum_{n=0}^l C_l^n \rho^n (-\delta)^{l-n} I_{m-n}\left(\frac{2\rho\delta}{w_0^2}\right). \quad (4)$$

Таким образом, параллельное смещение пучка с орбитальным числом l приводит к появлению суперпозиции пучков с орбитальными числами m . Вращение внеосевого пучка, задаваемое непрерывным изменением угла $\theta = \Omega t$, создает частотный сдвиг $(m-l)\Omega$ для каждой m -компоненты. Из (3) следует, что частотный сдвиг возникает при изменении состояния ОУМ фотона и пропорционален разности между орбитальными числами азимутальной гармоники и исходного пучка. Метод разложения смещенного пучка на азимутальные гармоники и полученные результаты описаны в [1].

В случае исходного пучка в виде суперпозиции нижней (гауссовой, $l=0$) моды и моды LG_0^1 ($l=1$) с разностью фаз $\Delta\Phi$ между ними образуется пучок с несимметричным распределением интенсивности (рис.1с). Такой пучок может быть примером элементарного оптического изображения. Каждая из мод при смещении пучка генерирует свой спектр ОУМ-компонент (3), и в смещенном пучке происходит интерференция соответствующих ОУМ-компонент. Интересно, что для каждой из составляющих пучка по отдельности ОУМ не изменяется при операции параллельного смещения пучка, но для суперпозиции мод результирующий ОУМ смещенного пучка зависит как от разности фаз между составляющими ЛГ-модами $\Delta\Phi$, так и от азимутального угла и величины смещения. Это означает, что оптический элемент получает от пучка некоторый момент импульса.

В соответствии с (3), одинаковый частотный сдвиг возникает в ОУМ-компонентах с различающимися орбитальными числами. Сложение пучков с различной азимутальной зависимостью фазы приводит к тому, что распределение спектральных компонент излучения имеет сложную структуру, зависящую как от радиальной координаты, так и от азимутального угла.

Выражение для монохроматической компоненты с частотой $\omega + m\Omega$ имеет вид

$$E_{m\Omega}(\rho, \varphi) = A_{m0}(\rho, \delta) \exp[i m (\varphi - \Omega t) + i \Delta\Phi] + A_{(m+1)1}(\rho, \delta) \exp[i(m+1)\varphi - im\Omega t], \quad (5)$$

где первая составляющая возникает из спектра смещенного гауссового пучка, а вторая – из спектра смещенной ЛГ-моды. Результат представляет собой суперпозицию нескольких пучков, содержащих оптические вихри (ОВ) [8]. Вид распределения интенсивности для трех монохроматических компонент и их фазовые карты в поперечном сечении пучка показаны на рис.2. Положение ОВ показано черными

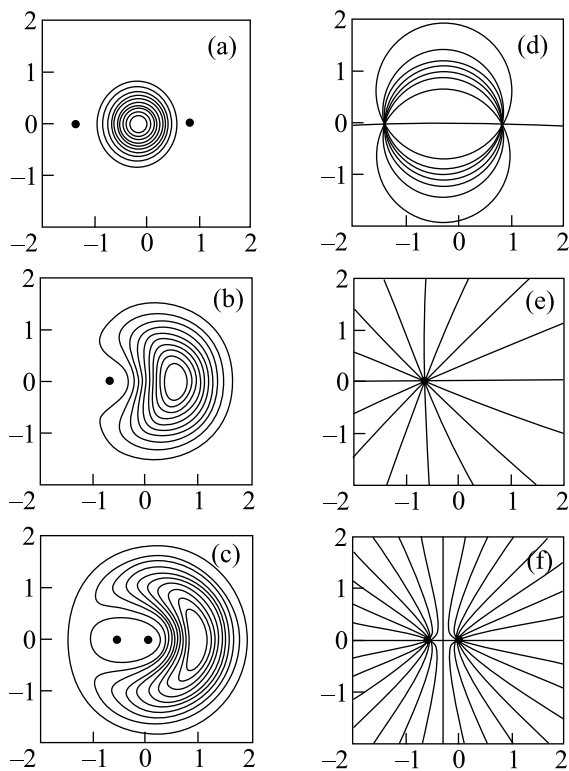


Рис.2. Контурными линиями показано распределение интенсивности в нескольких монохроматических компонентах: (а) частота $\omega - \Omega$, (b) ω , (с) $\omega + \Omega$. Нули интенсивности показаны черными точками. Соответствующие фазовые карты пучков показывают наличие двух ОВ противоположного знака (d), единичный внеосевой ОВ (e), два ОВ одного знака с фазовым седлом между ними (f). Шаг между изофазными линиями равен $\pi/8$. Поперечные размеры на осях указаны в единицах параметра перетяжки w_0

точками (нули интенсивности), а на фазовых картах определяется в точках схождения изофазных линий. Параметры расчета составляют $E_G = 0.5$, $E_{LG} = 1$, $\delta = 0.5w_0$, $\Delta\Phi = 0$.

В случае смещения пучка с отражением, ОУМ пучка не изменяется для гауссовой составляющей, но инвертируется для ЛГ-компоненты. Это связано с тем, что знак орбитального числа при отражении волны меняется на противоположный [8]. При нулевом поперечном смещении сдвиг частоты составляет $-2l\Omega$, и $-(m + l)\Omega$ для ОУМ-компоненты при смещении пучка. Для монохроматической компоненты с частотой $\omega - m\Omega$ распределение амплитуды получает вид

$$E_{-m\Omega}(\rho, \varphi) = A_{m0}(\rho, \delta) \exp [im(\varphi - \Omega t) + i\Delta\Phi] + A_{(m-1)1}(\rho, \delta) \exp [i(m - 1)\varphi - im\Omega t]. \quad (6)$$

На рис.3 показан расчет спектров (интенсивности монохроматических компонент) для различных

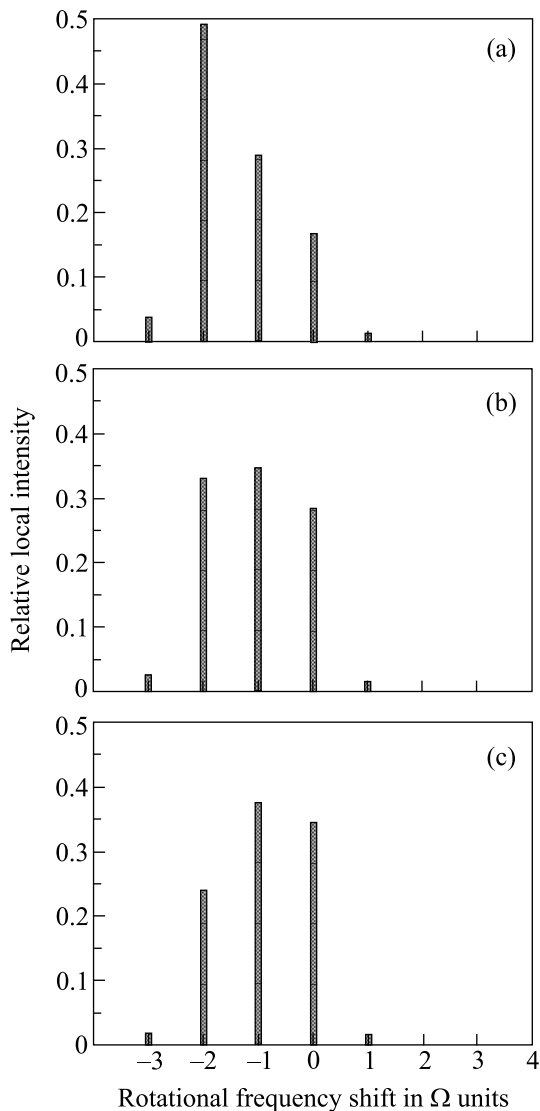


Рис.3. Расчет РЭД-спектров в различных точках наблюдения, радиальная координата $\rho = 0.5w_0$: (а) $\varphi = 0$; (b) $\varphi = \pi/2$; (с) $\varphi = \pi$

точек по отношению к оси вращения пучка. Соответствующие азимутальные углы выбраны равными $0, 90^\circ$ и 180° , радиальная координата составляет $\rho = 0.5w_0$. Параметры расчета составляют $E_G = 1$, $E_{LG} = 3$, $\delta = 0.5w_0$, $\Delta\Phi = 0$.

Физический смысл возникновения РЭД-спектра заключается в том, что при изменении состояния ОУМ оптического пучка происходит передача момента импульса от пучка к элементу. Вращение элемента приводит к совершению работы и обмену энергией между ОУМ-компонентой и элементом, что изменяет частоту компоненты. Пучок становится по-

лихроматическим, со специфическим пространственным распределением монохроматических компонент. Полученные результаты объясняют также причину наблюдаемого вращения изображения при отражении как следствие биений монохроматических компонент в пучке. Если в случае вращения пучка без отражения картина исходного пучка с внеосевым провалом интенсивности смещается параллельно самой себе, то в случае отражения вращение элемента приводит к вращению картины поперечного распределения в пучке с удвоенной угловой скоростью.

Отметим также связь полученной пространственной зависимости спектра вращающегося пучка с задачами передачи и приема информации на основе кодирования ОУМ [9].

1. M. V. Vasnetsov, V. A. Pas'ko, and M. S. Soskin, *New J. of Physics* **7**, 46 (2005) (online: http://ej.iop.org/links/q12/goRgPFQgQ+OHnpImTSYxlw/njp5_1_046.pdf).
2. В. В. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, М.: Наука, 1980 (V. V. Berestetskii, E. M. Lifshits, and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, Oxford: Pergamon, 1984).
3. M. Padgett, J. Courtial, and L. Allen, *Physics Today* (May 2004) 35.
4. L. Allen, M. W. Bejersbrtgen, R. J. C. Spreew, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev.* **A45**, 8185 (1992).
5. И. В. Басистый, А. Я. Бекшаев, М. В. Васнецов и др., *Письма ЖЭТФ* **76**, 566 (2002).
6. M. V. Vasnetsov, J. P. Torres, D. V. Petrov, and L. Torner, *Optics Letters* **28**, 2285 (2003).
7. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М.: Наука, 1979 (M. Abramowitz and I. Stegun, Eds., *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, 1964).
8. M. Vasnetsov and K. Staliunas, *Optical Vortices*, Nova Science Publishers, New York, 1999.
9. G. Gibson, J. Courtial, M. Padgett et al., *Optics Express* **12**, 5448 (2004) (online: <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?id=81642>).