Письма в ЖЭТФ, том 10, стр. 550–553 *5 декабря 1969 г.*

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОМЕЖУТОЧНОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОКОНЕСУЩИХ ПРОВОДНИКАХ

М.Я.Азбель

1. Покажем, что достаточно быстрое изменение проводимости σ как функции магнитного поля H может приводить к расслоению проводника, через который течет постоянный ток, на макроскопические или микроскопические области с различными значениями проводимости (аналог промежуточного или смешанного состояния), а также к переходу на нестационарный режим. Такое изменение имеет место, в частности, при появлении диамагнитных и периодических структур, переходах металл – диэлектрик, диэлектрик – металл и исчезновении зон Ландау (см., например), [1]), в пластинах в параллельном поле [2], и т. д.

Ввиду сложности задачи в точной формулировке будем демонстрировать рассуждения на простых и прозрачных примерах.

2. Пусть $\mathbf{j} = \sigma(H)\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ($\mathbf{j}$ – плотность тока, $\mathbf{H}$ – напряженность электрического поля), причем $\sigma(H) = \sigma_0\theta(H/H_k)$, $\theta(x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\theta(x) = 0$ при $x > 1$ (переход "металл – диэлектрик") Тогда при протекании тока $j = j(r)$ через проволоку радиуса R вначале, очевидно, $H(r) = 2\pi\sigma_0 Er/c \equiv H_k r/r_k$. Однако, при $R > r > r_k$ решение отсутст-

вует: "металлическая" фаза ($\sigma = \sigma_0$) при $r > r_k$ приводит к $H > H_k$, т.е. $\sigma(H) = 0$, а "диэлектрическая" ($\sigma = 0$) – к $H < H_k$, и $\sigma(H) = \sigma_0$ – в обоих случаях получается противоречие. (Такое же противоречие легко получить для $\sigma(H) = a_1 + \beta_1 H + (a_2 + \beta_2 H)\,\theta(H/H_k)$ при определенном соотношении между коэффициентами a_i, β_i). Отсутствует при этом не только симметричное решение $H = H_\phi(r)$, но и вообще стационарное решение. Рассмотрим более общий случай. Пусть при $H \leqslant H_k$ ("металл") зависимость $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(H)$ произвольна, а при $H > H_k$ ("диэлектрик") $\hat{\sigma}(H) = 0$. Тогда всюду в проводнике $H \leqslant H_k$. В самом деле, на границе металла с вакуумом $H \leqslant H_k$, на границе с диэлектриком $H = H_k$. Но вне металла $\mathrm{H} = \nabla\phi$, $\Delta\phi = 0$, а максимум модуля как гармонической функции, так и ее градиента достигается на границе области. Значит, вне металла невозможно $H > H_k$, т. е. невозможно появление диэлектрической фазы. Стало быть, весь проводник заполнен металлом, и $H \leqslant H_k$ в нем. Пусть теперь, для простоты толщина проволоки $R \to \infty$. Когда при $r \to \infty$ задача становится квазиодномерной, $H' = 4\pi j(H)/c$. (Так, при $\hat{\sigma}(H) = \sigma_0(H)\,\hat{a}$, где $\hat{a}$ не зависит от H, j параллельно оси z проволоки, $H_z = 0$, а $r \to \infty$ дает $dH_\phi/dr = 4\pi j(H_\phi)/c$). Отсюда видно, что для существования решения с $H \leqslant H_k$ при $r \to \infty$ необходима расходимость $\int^{H_k} dH/j(H) \sim r$, для чего нужно $\sigma'(H_k) \neq \infty$. (Это – необходимое условие существования аксиально-симметричного решения $H = H_\phi(r)$. Достаточным условием является конечность $\sigma'(H)$ при любых значениях H). Если же $\sigma'(H_k) = \infty$, решение с $H \leqslant H_k$ отсутствует. Согласно предыдущему это означает, что задача вообще не имеет симметричного решения, и что при постоянной сторонней разности потенциалов на торцах проволоки в ней появится либо асимметрия поля, либо движущаяся граница фаз $H = H_k$. (При $\sigma = \sigma_0\,\theta(H/H_k)$ возможно только нестационарное решение). Скорость v движения границы порядка Холловской: $v \sim cE/H_k$, откуда находятся частота колебаний $\omega \sim v/R$, и излучаемая мощность (см [3] § 67).

3. Таким образом, причина строгого отсутствия симметричного решения – особенность $\hat{\sigma}(H)$. Сколь угодно малое изменение $\hat{\sigma}(H)$, устраняющее бесконечность $\sigma'(H)$, приводит к появлению симметричного решения, асимптотически стремящегося к H_k (см. выше формулу для $r(H)$). Однако, такое решение является абсолютно неустойчивым. Для доказательства удобны далекие расстояния, где имеет место одномерный случай $H = H_y(x)$, а возмущения суть плоские волны по y и z.

В случае, когда $\hat{\sigma}$ диагонально, а возмущающая добавка $E_{1z} = E_1(x)\exp(\lambda t)$, $E_{1x} = E_{1y} = 0$, уравнение для E_1 принимает вид $E_1'' = \lambda f(x) E_1 + f'(x) E_1' / f(x)$, где $f(x) = (4\pi/c^2)\, \sigma\{H_y(x)\}$, $H_y(x)$ – стационарное решение. Подстановка $E = \sqrt{f}\mathcal{E}$ приводит к хорошо изученному (в смысле асимптотики решения, записи решения при мелкой и глубокой потенциальной яме, и т. д.) уравнению Шредингера

$$\mathcal{E}'' = \left(\lambda f + \frac{3}{4} f'^2/f^2 - \frac{1}{2} f''/f\right)\mathcal{E}$$

с граничными условиями, определяемыми непрерывностью E и E' на границе с вакуумом. (В случае неограниченного образца требуется затухание E на бесконечности). При немалом f'', $f'' > f'^2/f$ при $x = x_0$ (обеспечивающем "потенциальную яму") существует решение при определенных положительных значениях λ, т. е. имеет место неустойчивость.

Аналогичное рассмотрение в одномерном случае возможно всегда (в частности, при протекании постоянного тока по проволоке круглого сечения).

Физическая причина неустойчивости постоянного тока состоит в следующем. Протекающий по образцу ток создает неоднородное магнитное поле, обусловливающее неоднородность проводимости и приводящее к возникновению самосогласованного неоднородного распределения плотности тока. Допустим, что в некоторой области плотность тока флуктуационно изменилась, например, возросла. В результате этого изменится магнитное поле: возрастет в одних местах и уменьшится в других. Это, в свою очередь, приведет к соответствующему изменению проводимости. Поскольку $\sigma'(H) \neq \mathrm{const}$, "интегральная" проводимость может возрасти, что вызовет рост протекающего тока – т. е. нарастание флуктуации. Стало быть, появится абсолютная неустойчивость исходного распределения тока. В результате может возникнуть либо распределение, не обладающее исходной симметрией задачи, либо колебания, соответствующие нестационарному режиму.

Стационарное несимметричное решение соответствует либо промежуточному (в случае положительной поверхностной энергии), либо смешанному (при отрицательной поверхностной энергии; роль радиуса корреляции играет ларморовский радиус [1]) состояниям.

Подчеркнем, что в пункте 2 рассмотрение проводилось для $\sigma(H)$, имеющего особенность, исключительно для простоты рассуждений. Неустойчивость стационарного симметричного распределения тока является, как ясно из изложенного, весьма общим фактом. Причина его – существенная нелинейность $\sigma(\mathrm{H})$ и нелокальность связи H с $\mathbf{j}$.

Определение вида несимметричного и нестационарного решений и их устойчивости по отношению к конечным возмущениям при произвольных $\hat{\sigma}(\mathrm{H})$ и $\mathrm{B} = \mathrm{B}\{\mathrm{H}\}$ (B – магнитная индукция) является крайне сложной задачей (сводящейся к нелинейным уравнения Максвелла) и возможно, по-видимому, только на машине.

Для экспериментального наблюдения указанных эффектов в случае большого характерного H значительную его часть можно, конечно, получать от внешнего источника.

Я признателен И.Б.Левинсону и Э.И.Рашба за полезные дискуссии.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27 октября 1969 г.

Литература

[1] М.Я.Азбель. УФН, **98**, 601, 1969.

[2] М.Я.Азбель. ЖЭТФ, **44**, 1262, 1963.

[3] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.