Письма в ЖЭТФ, том 10, стр. 567–570 *5 декабря 1969 г.*

ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В СВЕРХТЕКУЧЕМ РАСТВОРЕ

А.Я.Паршин

Известно, что в обычных жидкостях могут распространяться внутренние гравитационные волны, происхождение которых связано с неоднородностью жидкости в поле тяжести [1]. Для существования этих волн необходимо, чтобы тепловое равновесие устанавливалось гораздо медленнее, чем механическое. Ясно, что в сверхтекучем гелии, в котором это требование не выполняется, подобное явление не может существовать; всякое нарушение равновесия приводит здесь лишь к возникновению волн первого или второго звука.

Сверхтекучий раствор в некотором смысле аналогичен обычной жидкости: в стационарных условиях здесь можно создать градиент температуры [2]. Ниже будет показано, что в таком растворе могут существовать и гравитационные волны.

Условия механического равновесия сверхтекучего раствора в поле тяжести суть следующие:

$$\nabla p - \rho \mathbf{g} = 0; \qquad \nabla \mu_4 - \mathbf{g} = 0$$

где p – давление, ρ – плотность, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, μ_4 – химический потенциал He^4 в растворе.

В гравитационной волне p и μ_4 мало отличаются от своих равновесных значений. Это значит, что при дифференцировании термодинамических величин p и μ_4 следует считать постоянными. Градиент температуры будем считать достаточно малым, так чтобы равновесные значения термодинамических величин мало менялись на расстояниях порядка длины волны.

Уравнения гидродинамики растворов [2], линеаризованные применительно к нашей задаче, могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}' = 0, \qquad (1)$$

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n'}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s'}{\partial t} + \nabla p' - \rho' \mathbf{g} =$$

$$= \eta \Delta \mathbf{v}_n' + \zeta_1 \nabla \operatorname{div} \mathbf{j}' + \left(\frac{1}{3}\eta - \zeta_1 \rho + \zeta_2\right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_n', \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s'}{\partial t} + \nabla \mu_4' = \zeta_3 \nabla \operatorname{div} \mathbf{j}' + (\zeta_4 - \rho \zeta_3) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_n', \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c)' + \nabla(\rho c)\, \mathbf{v}_n' + \rho c \operatorname{div} \mathbf{v}_n' = \rho D(\Delta c' + k_T T^{-1} \Delta T'), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \nabla S\, \mathbf{v}_n' + S \operatorname{div} \mathbf{v}_n' =$$

$$= \kappa_{эфф} T^{-1} \Delta T' + c^{-1} S D(\Delta c' + k_T T^{-1} \Delta T'). \qquad (5)$$

(Все обозначения в (1 – 5) взяты из [2]; штрихованные величины обозначают малые добавки к равновесным значениям). Мы сохранили в двух последних уравнениях члены с ∇S и $\nabla(\rho c)$, так как именно они, как будет видно ниже, определяют собой явление.

Воспользовавшись потенциальностью $\mathbf{v}_s$, из (2) после несложных преобразований получим:

$$\left(\rho_n \frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta\right)(\Delta \mathbf{v}_n' - \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_n') = \mathbf{g} \Delta \rho' - \nabla(\mathbf{g} \nabla \rho'), \qquad (6)$$

а из (4) и (5)

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \nabla s\, \mathbf{v}_n' = \kappa_{эфф} T^{-1} \Delta T' (\rho c)^{-1}; \qquad s = \frac{S}{\rho c}. \qquad (7)$$

Если в уравнении (7) пренебречь членом с ∇s, то мы получим лишь обычную затухающую температурную волну. Ясно поэтому, что в последнем уравнении все члены, вообще говоря, одного порядка величины. Возвращаясь к исходной системе, видим, что в этом случае должно быть, вообще говоря,

$$\nabla S \mathbf{v}'_n = S \operatorname{div} \mathbf{v}'_n .$$

Ищем решение в виде плоской волны $\mathbf{v}'_n \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$.

Тогда, ввиду малости ∇S, имеем

$$k^2 \mathbf{v}'_n >> \mathbf{k} \operatorname{div} \mathbf{v}'_n$$

т. е. рассматриваемые колебания являются поперечными, как и в обычной жидкости. Пренебрегая малым членом в уравнении (6), из условия совместности уравнений (6) и (7) получим искомую связь между ω и $\mathbf{k}$:

$$(\omega + i\chi k^2)(\omega + i\nu k^2) - \omega_0^2 = 0, \qquad (8)$$

$$\chi = (\rho c T)^{-1} \kappa_{\text{эфф}} \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{p,\mu_4}; \qquad \nu = \rho_n^{-1} \eta ,$$

$$\omega_0^2 = -g\rho_n^{-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{p,\mu_4} \frac{\partial s}{dz} \sin\theta .$$

Здесь θ – угол между направлением оси z (вертикально вверх) и направлением $\mathbf{k}$. Подставляя это решение в точную систему уравнений [2], можно убедиться, что все члены, которыми мы пренебрегли, действительно малы.

При малых $\mathbf{k}$ и $\omega_0^2 > 0$ уравнение (8) описывает слабозатухающие колебания:

$$\omega = \omega_0 - \frac{i}{2}(\chi + \nu) k^2 .$$

В противоположном случае больших $\mathbf{k}$ имеем две затухающие волны вязкую и температурную. Наконец, если нарушено условие

$$\omega_0^2 + \chi\nu k^4 > 0, \qquad (9)$$

то у (8) появляется решение с положительной мнимой частью, т. е. равновесное состояние оказывается неустойчивым по отношению к возмущениям данного типа. Условие (9), таким образом, – есть условие отсутствия конвекции в сверхтекучем растворе, а величины

$$\rho c T \kappa^{-1}_{эфф} \rho_n^{-1} \eta \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,\ \mu_4} \quad \text{и} \quad g \rho_n \eta^{-2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{p,\ \mu_4} \frac{sp}{dz}\ \ell^4$$

(ℓ – характерный размер) играют роль чисел Прандтля и Грассхофа соответственно.

Пользуюсь случаем выразить свою признательность А.Ф.Андрееву за неизменное внимание и многочисленные полезные советы.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 ноября 1969 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред, 1953, § 14.
[2] И.М.Халатников. Введение в теорию сверхтекучести, 1965, § 24.