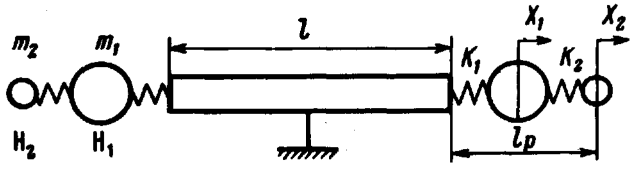
Письма в ЖЭТФ, том 10, стр. 495–499 20 ноября 1969 г.

ГРАВИТАЦИОННЫЙ РЕЗОНАНСНЫЙ ДЕТЕКТОР С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Г.Я.Лаврентьев

Чувствительность резонансных детекторов гравитационных волн может быть улучшена, как отмечалось в [1], за счет увеличения начального смещения, что достигается введением жесткого (для данной частоты) стержня в разрыв резонансной связи, Кроме этого, в качестве



механического усилителя резонансных колебаний (как показано ниже) может быть использована система с двумя степенями свободы. Схема такого детектора показана на рисунке.

Оценим, сначала, допустимую длину стержня в поле гравитационной волны, определяемой параметром h и частотой ω, т. е. длину, при которой еще выполняется условие $\Delta\ell << \zeta$ (где $\Delta\ell = F\ell/ES$ – квазистатическое смещение торцов стержня, $\zeta \geq h\ell/2$ – сокращение пространственного расстояния ℓ в поле волны). Переписывая условие в виде $\zeta = n\Delta\ell\,(n >> 1)$, и подставляя в $\Delta\ell$ выражение для силы $F = \omega^2 m\ell h/4$ [2], после простых преобразований получим для ℓ:

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{n}}\ \frac{v_s}{\omega}\ , \qquad (1)$$

где v_s – скорость распространения поперечных колебаний в стержне.

Рассмотрим теперь резонансную систему с двумя степенями свободы (что соответствует одной половине детектора, так как центр инерции системы покоится в поле волны). Затухание в системе определяется силами трения, действующими на массы.

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + H_1\dot{x}_1 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 + H_2\dot{x}_2 = F_2 \end{cases} . \qquad (2)$$

Запишем систему уравнений в симметричном виде, вводя обозначения $a_{11} = k_1 + k_2$, $a_{22} = k_2$, $a_{12} = -k_2$, $\beta_{11} = m_1$, $\beta_{22} = m_2$, $\epsilon_{11} = H_1$, $\epsilon_{22} = H_2$, причем $\beta_{12} = 0$, $\epsilon_{12} = 0$:

$$\begin{cases} \beta_{11}\ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \epsilon_{11}\dot{x}_1 = f_1 e^{i\omega t} \\ \beta_{22}\ddot{x}_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \epsilon_{22}\dot{x}_2 = f_2 e^{i\omega t} \end{cases} . \qquad (3)$$

Положим парциальные частоты первого и второго резонаторов равными:

$$n^2 = a_{11}/\beta_{11} = a_{22}/\beta_{22} .$$

Тогда для собственных частот системы, считая H_1 и H_2 малыми величинами, получим [3]:

$$\omega^2_{1,2} = n^2(1 \pm \gamma)\ , \quad \text{где} \quad \gamma^2 = a^2_{12}/a_{11}a_{22} .$$

Пусть одна из собственных частот совпадает с частотой вынуждающей силы. Будем считать, что величины добротностей резонаторов ограничены только временем наблюдения $Q = \omega\tau/2$. Тогда:

$$Q = \frac{m_1\omega}{H_1} = \frac{m_2\omega}{H_2}, \quad \text{т. е.} \quad H_1 = H_2(m_1/m_2) \quad . \tag{4}$$

Поскольку смещение тела в поле гравитационной волны не зависит от его массы, получим аналогичное соотношение для сил $f_1 = f_2 m_1/m_2$. Будем искать решение системы (3) в виде $x_{1,2} = x_{1,2}e^{i\omega t}$. Воспользовавшись приведенным в [4] общим решением системы (3) и произведя вычисления x_1, x_2 и определителя системы D, получим:

$$x_1 = \frac{f_1k_1}{D}\left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{i}{Q} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right), \quad x_2 = \frac{f_2k_2}{D}\frac{m_1}{m_2}\left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \frac{i}{Q} + 1\right),$$

$$D = 2i\omega k_2H_2\sqrt{m_1/m_2}\,.$$

Пренебрегая в выражениях для x_1 и x_2 (при $m_1 >> m_2$) первыми и вторыми членами в скобках и пользуясь в дальнейшем малостью m_2/m_1, будем иметь:

$$x_1 = \frac{f_1}{2}\frac{Q}{k_1} \qquad x_2 = \frac{f_2}{2}\frac{Q}{k_2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\,.$$

Вводя статические смещения масс $\delta_1^{st} = \dfrac{F_1}{k_1}$, $\delta_2^{st} = \dfrac{2F_2}{k_2}$, которые легко получить из (2) при $x = \mathrm{const}$ запишем окончательно:

$$x_1 = \frac{1}{2}\delta_1^{st}Q, \qquad x_2 = \frac{1}{4}\delta_2^{st}Q\sqrt{m_1/m_2}\,.$$

Итак, для относительного смещения ζ малых тел m_2 в полной схеме детектора ($\delta^{st} = h(\ell + \ell_p)$) получим:

$$\zeta = \frac{1}{2}h(\ell + \ell_p)\,Q\sqrt{m_1/m_2} \tag{5}$$

т. е. смещения будут в $\sqrt{m_1/m_2}$ раз больше, чем в системе с одной степенью свободы. Надо заметить, что если добротности не равны, то в (5) войдет худшая добротность.

Оценим теперь флуктуационные смещения малого тела. Флуктуационные колебания торца стержня, пересчитанные в смещения малого тела, малы по сравнению с флуктуацией координаты последнего, обусловленной действием остаточного газа на резонансную систему. Воспользовавшись [5] выражением для "компонент Фурье" флуктуации координаты в резонансном режиме $((x^2)_\omega)$, запишем флуктуационные смещения в полосе частот Δf, определяемой временем наблюдения $\Delta f = 1/\tau$:

$$\overline{x_2^2} = (x^2)_\omega \, \Delta f = \frac{2kT\Delta f}{\omega^2 H_2} ,$$

(где k – постоянная Больцмана, T – температура).

Заметим, что в силу условия (4) эта оценка совпадает с оценкой смещений малого тела, вызванных флуктуационными колебаниями первого тела.

Приведем численные оценки флуктуационных смещений и величин потоков энергии достаточных для регистрации, взяв в качестве излучателя пульсар в Крабовидной туманности с $T = 3{,}3 \cdot 10^{-2}$ *сек* $(\omega \approx 3{,}8 \cdot 10^2$ *сек*$^{-1})$ и мощностью гравитационного излучения $P = 10^{38}$ *эрг/сек*, что соответствует потоку $t \approx 10^{-5}$ *эрг/см*$^2 \cdot$*сек* на уровне Земли.

Для $x_{\text{флукт}}$ при $\tau \approx 10^6$ *сек*, $m = 100$ *г* получим величину $8 \cdot 10^{-12}$*см*.

Выразим величину потока через минимально обнаружимые смещения (ζ), используя приведенную в [6] формулу для потока энергии гравитационных волн $t = ch^2/2\kappa$ (где κ – постоянная Эйнштейна). Для этого запишем h через ζ из (5) и подставляя в выражение для t получим:

$$t = \frac{2c\,\omega^2 \zeta^2}{\kappa(\ell + \ell_p)^2 Q^2 \dfrac{m_1}{m_2}} .$$

Вычислим сначала величину ℓ. При $n = 10$ из (1) получим $\ell = 6{,}6$ *м*. При длине камеры резонатора (сверхпроводящий подвес) $\ell_p \approx 1{,}5$ *м* [1], $Q = 2 \cdot 10^8$, $m_1/m_2 = 10^3$ и, взяв $\zeta = 10^{-11}$ *см*, получим для t величину $t \approx 10^{-5}$ *эрг/см*^{2}*сек*.

При этой оценке потока предполагалось, что сигнал будет превышать уровень шума. Однако, в данном случае можно воспользоваться методом накопления, который дает выигрыш в отношении сигнал-шум в

$n = \tau / T$ раз (где τ – время наблюдения, T – период сигнала). Предварительные поиск фазы или усреднение по фазе ухудшают это отношение на 8 и 34% [7]. Таким образом, при приеме периодического сигнала можно надеяться на регистрацию потока $f \approx 10^{-10} - 10^{-11}$ *эрг/см² сек.*

В заключение, выражаю благодарность А.И.Цыгану и Э.Б.Глинеру за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
10 октября 1969 г.

Литература

[1] Г.Я.Лаврентьев. ЖТФ, 39, 1316, 1969.

[2] Дж.Вебер. Общая теория относительности и гравитационные волны. М., ИИЛ, 1962.

[3] С.П.Стрелков. Введение в теорию колебаний. М., Изд. Наука 1964.

[4] Н.Кин, Тонг. Теория механических колебаний. М., ГНТИМЛ, 1963.

[5] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. М., Изд. Наука 1964.

[6] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., Изд. Наука 1967.

[7] А.А.Харкевич. Борьба с помехами. М., Изд. Наука, 1965.