Письма в ЖЭТФ, том 10, стр. 389 – 392 *20 октября 1969 г.*

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ С ЧАСТОТОЙ, РАВНОЙ ПОЛОВИНЕ ОТ ИОННОЙ ЦИКЛОТРОННОЙ

А.В.Тимофеев

1. Известно, что в адиабатических ловушках плазма может быть неустойчивой по отношению к раскачке ионных циклотронных колебаний, т.е. колебаний, частота которых близка к ионной циклотронной ω_i или к ее гармоникам $n\omega_i$. Однако, в экспериментах на установках Феникс [1] и Огра–1 (не опубликовано) наряду с ионной циклотронной неустойчивостью наблюдалась раскачка колебаний с частотами, кратными половине ионной циклотронной частоты $\omega \approx \frac{n}{2}\omega_i$. По нашему мнению, возбуждение колебаний последнего типа может быть связано с явлением параметрического резонанса. Поясним это утверждение. Ионная циклотронная неустойчивость начинает раскачиваться при такой плотности плазмы, когда частота замагниченных электронных ленгмюровских колебаний сравнивается с ионной циклотронной [2,3]. В однородной и безграничной плазме спектр частот замагниченных электронных ленгмюровских колебаний дается формулой $\omega = \omega_{pe}\frac{k_{\parallel}}{k} \leqslant \omega_{pe}$, здесь ω_{pe} – электронная ленгмюровская частота, $k_{\parallel}$ – компонента волнового вектора вдоль магнитного поля. В ограниченных системах спектр дискретен и для раскачки необходимо, чтобы максимальная частота из этого спектра сравнялась с ω_i. (Эта частота меньше ω_{pe}, так как раскачиваются колебания с $k_{\perp} \neq 0$). При этом колебания с меньшими частотами в рамках линейной теории остаются устойчивыми. Однако, при наличии неустойчивости на ионной циклотронной частоте параметры плазмы становятся переменными во времени, и это создает предпосылку для параметрической раскачки колебаний с $\omega \approx \frac{1}{2}\omega_i$. При существенно больших значениях плотности $\omega_{pe} > n\omega_i$ становится возможной параметрическая раскачка колебаний с $\omega \approx \frac{\ell}{2}\omega_i$ $(\ell = 1, 2, \ldots 2n)$

2. Предположим, что в адиабатической ловушке возбуждены колебания электрического потенциала на ионной циклотронной частоте. Интересующие нас системы (Феникс, Огра–1) обладают аксиальной симметрией (ось симметрии параллельна магнитному полю $\mathbf{H} \parallel OZ$). Поэтому возмущения потенциала будут иметь вид $\phi_1(\mathbf{r}, t) = \phi_1(r, z)\cos(\omega_i t - n_1\theta)$, здесь θ – азимутальный угол. При рассмотрении эволюции колебаний

с $\omega \approx \frac{1}{2}\omega_i$ будем использовать асимптотические методы, развитые в теории нелинейного осциллятора [4]. В ряде случаев эти методы применялись и в теории плазменных колебаний [5, 6]. Следуя [4–6], будем искать возмущения потенциала в виде $\phi_2(\mathbf{r}, t) = \phi_2(r, z, t)\cos(\omega_i t/2 + \psi(t) - m_2\theta)$. В дальнейшем будет предполагать, что характерный временной масштаб амплитуды $\phi_2(r, z, t)$, а также медленно меняющейся части фазы $\dot{\psi}(t)$ велик по сравнению с циклотронным периодом.

Временная зависимость $\phi_2(r, z, t)$ и $\psi(t)$ должна определяться с помощью уравнения движения электронов, уравнения непрерывности и уравнения Пуассона. Произведя несложные выкладки получаем:

$$\dot{\psi} = \delta\omega - A\cos 2\psi, \quad (1) \qquad \dot{p} = -pA\sin 2\psi, \quad (2)$$

Здесь $p = [\langle(\partial\phi_2/\partial z)^2\rangle]^{1/2}$, $\delta\omega = \omega_2 - \omega_i/2$, ω_2 – частота рассматриваемых колебаний в линейном приближении, т.е. при $\phi_1 = 0$.

$$A = \frac{1}{8}\omega_i \left\langle \frac{n_1(r, z)}{n_0(r, z)}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)^2\right\rangle \left\langle\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)^2\right\rangle^{-1},$$

$$n_1(r, z) = \frac{e}{m} n_0\omega_i^{-2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2},$$ n_0 – невозмущенная плотность плазмы, скобки означают интегрирование по r и z.

Интересно отметить, что точно такие же уравнения для $p(t)$, $\psi(t)$ получаются из уравнения Матье:

$$\ddot{x} + \omega_2^2\left(1 - \frac{4A}{\omega_2}\cos\omega_i t\right)x = 0, \quad (3)$$

если решение (3) искать в виде $x = p(t)\cos\left(\frac{\omega_i}{2}t + \psi(t)\right)$. [4]

Эта аналогия позволяет перенести результаты исследования (3) на наш случай. В частности, если частота собственных колебаний ω_2 окажется близкой $\omega_i/2$, то рассматриваемые колебания будут неустойчивыми. Условие раскачки имеет вид:

$$A = \frac{1}{4}\omega_i \frac{\left\langle \frac{n_1}{n_0}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)^2\right\rangle}{\left\langle\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)^2\right\rangle} > |\delta\omega| = \left|\omega_2 - \frac{\omega_i}{2}\right|. \quad (4)$$

При этом для раскачки также оказывается необходимым, чтобы вместе с частотой делилось и азимутальное волновое число m, т. е. имело место соотношение $m_2 = m_1/2$.

Для того чтобы проверить, выполняется ли условие (4) в реальных системах, требуется точное решение задачи о собственных колебаниях плазмы в линейном приближении с определением вида функции $n_1(r,z)$, $\phi_2(r,z)$, а также частоты собственных колебаний ω_2. Для этого в свою очередь необходимо знание невозмущенного распределения плотности плазмы $n_0(r,z)$. Однако, соответствующие экспериментальные данные отсутствуют. Поэтому, строго говоря, наше утверждение о параметрическом характере раскачки колебаний с $\omega \approx \omega_i/2$ остается лишь гипотезой. В его пользу свидетельствуют измерения азимутальной зависимости возмущений [1]. Из результатов этих измерений можно сделать вывод о том, что колебания с $\omega \approx \omega_i/2$ обладали вдвое меньшим амплитудным волновым числом, чем колебания с $\omega \approx \omega_i$, как это и следует из теории. Соответствующие измерения на Огре–1 не производились. В этих экспериментах при плотности, существенно бо́льшей критической, наблюдалось возбуждение колебаний с $\omega \approx n\omega_i/2$ $(7 \geqslant n \geqslant 2)$. Их раскачку естественно связать с возбуждением высших резонансов, см. [4].

В заключение заметим, что параметрическая раскачка колебаний может рассматриваться, как частный случай распадной неустойчивости. Условие распада колебания с частотой ω на два колебания с частотами ω_1 и ω_2, как известно, имеет вид $\omega = \omega_1 + \omega_2$. При параметрическом резонансе имеем $\omega_1 = \omega_2 = \omega/2$. С другой стороны в [6] показано, что в определенном смысле сама распадная неустойчивость эквивалентна параметрическому резонансу. В частности, подходящим выбором переменных уравнения, описывающие распадную неустойчивость, могут быть приведены к виду (1), (2). Так например, если в однородной и безграничной плазме замагниченные ленгмюровские колебания с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ $\phi(\mathbf{r},t) = \phi\cos(\mathbf{kr} - \omega t)$ распадаются на два других $\phi^{(1,2)}(\mathbf{r},t) = \phi^{(1,2)}(t)\cos(\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{r} - \omega_{1,2}t - \psi_{1,2}(t))$, то в этом случае в уравнениях (1), (2) следует положить

$$p = (\phi_1\phi_2)^{1/2}; \quad \psi = \frac{1}{2}(\psi_1(t) + \psi_2(t) + \delta\omega t), \ \delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega,$$

$$A = -\frac{n}{n_0}\frac{\omega}{4k_{\parallel}}(\omega_1\omega_2)^{1/2}\left(\frac{k_{\parallel}}{\omega} + \frac{k_{\parallel 1}}{\omega_1} + \frac{k_{\parallel 2}}{\omega_2}\right),$$

$$n = -\frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} n_0 \phi \quad , \qquad \phi^{(1)}/\phi^{(2)} = \frac{k_{\parallel 2}}{k_{\parallel 1}} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{3/2} .$$

Поступила в редакцию
18 августа 1969 г.

Литература

[1] L.G.Kuo, E.G.Murphy, M.Petravic, D.R.Sweetman. Phys. Fluids, 8, 547, 1965.

[2] Ю.Н.Днестровский, Д.П.Костомаров, В.И.Пистунович. Яд. синтез, 3, 30, 1963.

[3] А.В.Тимофеев, В.И.Пистунович. Сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат. М., 1967.

[4] Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

[5] А.В.Тимофеев. Яд. синтез, 4, 354, 1964.

[6] A.A.Galeev, R.S.Sagdeev. Lectures on the non-linear Theory of Plasma, Triest, 1966.