

ИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ПОЛЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

М.Д.Миллионщиков

В работе [1] было показано, что принцип суперпозиции вязкостей — молекулярной и турбулентной — при соответствующем выборе параметров, определяющих турбулентную вязкость, дает возможность вычислить распределение скоростей в пристеночном слое и в трубах и закон сопротивления в трубах с гладкими и шероховатыми стенками.

Турбулентная вязкость (кинематическая) определяется соотношением:

$$\nu_T = K \nu \ell,$$

где ν — масштаб скорости, ℓ — масштаб длины.

Из анализа экспериментальных данных вытекает, что масштабом пульсационной скорости в пристеночном слое и в трубах является, так называемая динамическая скорость $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$, где τ — касательное напряжение, ρ — плотность жидкости. Особенностью работы [1] является то, что в ней рассматривается не постоянное значение динамической скорости, определяемое напряжением на стенке τ_0 , а скорость v_* , зависящая от напряжения τ в данном сечении, которая является масштабом пульсационной скорости в данном сечении.

В настоящей работе принцип суперпозиции молекулярной и турбулентной вязкостей применен к рассмотрению изотропной турбулентности.

В этом случае основное уравнение однородной изотропной турбулентности может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial B_d^d(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 (2\nu + 2\nu_T) \frac{\partial B_d^d(r, t)}{\partial r}, \quad (1)$$

где $B_d^d(r, t)$ корреляционная функция второго порядка, связывающая продольные пульсации скоростей

$$B_d^d = \overline{u_d(x, t) u_d(x+r, t)}.$$

Черта сверху означает осреднение, а u_d — составляющая пульсация скорости в направлении, определяемом точками x и $x+r$.

С привлечением третьих моментов известное уравнение Кармана [2] для изотропной турбулентности может быть записано в виде:

$$\frac{\partial B_d^d}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left(2\nu \frac{\partial B_d^d}{\partial r} + B_d^{dd} \right), \quad (2)$$

где

$$B_d^{dd}(r, t) = \overline{u_d(x, t) u_d^2(x+r, t)}$$

В качестве масштаба турбулентной вязкости примем выражение

$$\left[\int_0^r B_d^d(r, t) r dr \right]^{1/2}$$

или приближенно

$$[B_d^d(0, t)]^{1/2} r.$$

При этом предположении имеем основное уравнение в виде:

$$\frac{\partial B_d^d}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left(2\nu + 2k [B_d^d(0, t)]^{1/2} r \right) \frac{\partial B_d^d}{\partial r} \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) дают связь между вторыми и третьими моментами

$$B_d^{dd}(r, t) = 2k [B_d^d(0, t)]^{1/2} r \frac{\partial B_d^d(r, t)}{\partial r} \quad (4)$$

Для случая пренебрежимо малого влияния турбулентной вязкости ($K = 0$) решение уравнения (3) имеет вид:

$$B_d^d(r, t) = \frac{e^{-r^2/8\nu t}}{4\nu t r^{3/2}} \int_0^\infty B_d^d(\xi, t) \xi^{5/2} I_{3/2} \left[\frac{\xi r}{4\nu t} \right] e^{-\xi^2/8\nu t} d\xi,$$

которое при условии

$$\int_0^\infty B_d^d(r, t) r^4 dr = \text{const} \quad (5)$$

дает автомодельное решение типа точечного источника

$$B_d^d(r, t) = t^n f(\eta) = C(4\nu t)^{-5/2} \exp(-r^2/8\nu t),$$

где $\eta = r t^{-1/2}$, $n = -5/2$, C — постоянная [3].

Л.Г. Лойцяным [4] было показано, что при условии достаточно быстрого затухания вторых и третьих моментов на бесконечности условие (5) сохраняется для уравнения (3). Нетрудно видеть, что (5) справедливо для уравнения (3), если $r^5(\partial B_d^d / \partial r) = 0$ при $r \rightarrow \infty$. Входящая в уравнение (4) величина K в общем случае может зависеть от времени. Примем для K выражение

$$K = K_0 (t/t_0)^m, \quad (6)$$

где K_0 и m — постоянные, подлежащие определению из экспериментальных данных.

В случае, когда K велико и молекулярной вязкостью можно пренебречь, уравнение (3) также имеет автомодельное решение вида

$$B_d^d = (t/t_0)^n f(\eta); \quad \eta = (r/\ell_0)(t/t_0)^\beta,$$

где ℓ_0 — масштаб длины, соответствующий моменту времени t_0 . В качестве ℓ_0 выбрано $\ell_0 = \sqrt{\nu t_0}$. Из условий автомодельности и инвариантности в этом случае следует

$$\beta = -2(1+m)/7; \quad n = -10(1+m)/7.$$

Это решение имеет вид

$$B_d^d(r, t) = \text{const} \left(\frac{t}{t_0} \right)^n \exp \left\{ \left(\frac{r}{\ell_0} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^\beta \frac{\beta \nu}{2K_0 \ell_0 \nu_0} \right\}. \quad (7)$$

В частном случае, когда $m = 0$, т. е. коэффициент K не зависит от времени, показатели β и n совпадают с известными показателями Колмогорова [5]. Однако, как мы увидим, отличие от нуля показателя m следует из того, что по экспериментальным данным минимум отношения $B_d^{dd}(r, t) / [B_d^d(0, t)]^{3/2}$ изменяется со временем по закону $(t/t_0)^m$, где $m = 1/9$.

В общем случае, когда необходимо учитывать как турбулентную, так и молекулярную вязкости, автомодельного решения не существует. Однако хорошее приближение к автомодельному решению с тем или иным показателем β можно получить, если рассматривать приближенное уравнение, получаемое осреднением временного множителя, возникающего в слагаемом, для которого данное автомодельное решение является чужеродным.

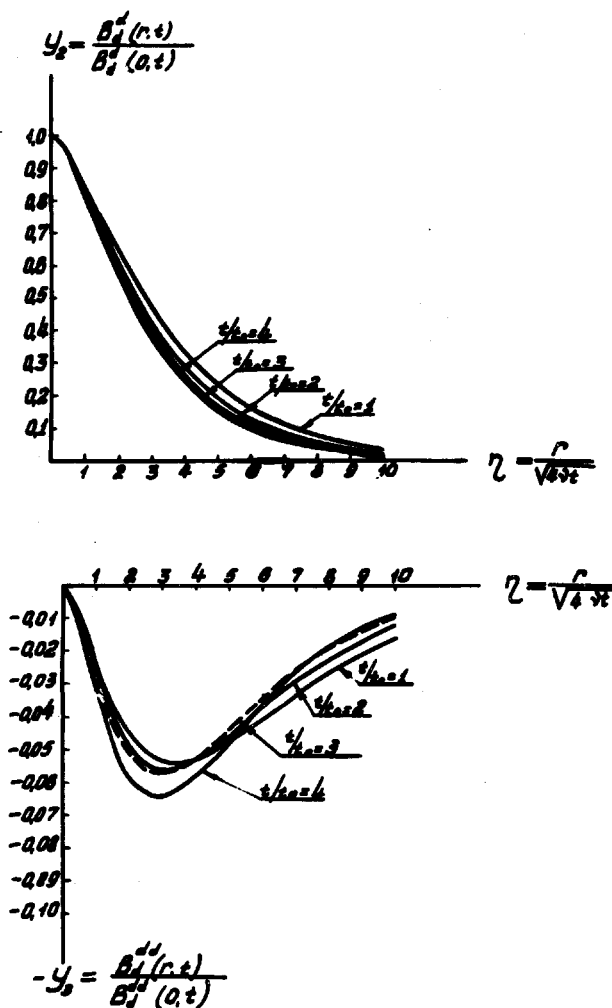
В случае малой вязкости интересным является "квазиавтомодельное" решение, близкое к автомодельному с показателем $\beta = -2(1+m)/7$. Возникающий при молекулярной вязкости множитель $(t/t_0)^{1+2\beta}$ заменяем его средним значением T_c и получаем приближенное уравнение, решение которого записывается формулой

$$y_2 = \frac{B_d^d(r, t)}{B_d^d(0, t)} = e^{\beta \eta / 2K_0} \left[1 + \frac{K_0}{T_c} \eta \right]^{-T_c \beta / 2K_0^2}. \quad (8)$$

откуда следует

$$y_3 = \frac{B_d^{dd}(r, t)}{[B_d^d(0, t)]^{3/2}} = K_0 \frac{\nu}{\nu_0 \ell_0} \left(\frac{t}{t_0} \right)^m \frac{\eta^2}{1 + \eta K_0 / T_c} y_2 \quad (9)$$

Результаты вычислений при $m = 1/9$; $K_0 / \rho = -2,5$ и $\nu_0 \ell_0 / \nu = 14,7$ приведены на рисунке. Эти данные находятся в удовлетворительном соответствии с измерениями Стюарта и Таунсенда [6],



хотя и дают несколько меньшее отклонение от автомодельности по переменной $\eta / \sqrt{4\nu t}$, чем это следует из измерений Стюарта – Таунсенда.

Является ли это отклонение следствием нарушения изотропности в потоке за решеткой или же необходимо использовать более общее решение уравнения (4) подлежит дальнейшему анализу.

Следует отметить, что вычисленные третьи моменты лучше соответствуют экспериментальным данным, полученным независимыми измерениями, чем вторые моменты, по которым они вычислены. Отсюда вытекает необходимость проведения также и экспериментальных исследований поведения вторых и третьих моментов изотропной турбулентности.

Автор выражает благодарность И.С.Кудрявцевой, А.А.Гайдюкову и Л.Н.Сазыкиной за проведение вычислительных работ.

Поступила в редакцию
5 сентября 1969 г.

Литература

- [1] М.Д.Миллионщиков. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М., Изд. Наука, 1969.
- [2] А.С.Монин, А.М.Яглом. Статистическая гидромеханика, М., 1965, т. 2.
- [3] М.Д.Миллионщиков. ДАН СССР, 22, №5, 1939.
- [4] Л.Г.Лойцянский. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. ТрудыЦАГИ, вып. 440, 1939.
- [5] А.Н.Колмогоров. ДАН СССР, 31, 538, 1941.
- [6] R.W.Stewart, A.A.Townsend. Phil. Trans. Roy. Soc., A243, 359, 1951.