*Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 2, стр. 71 – 73* *25 января 1985 г.*

# ЧАСТИЦА В СЛУЧАЙНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ. НОВАЯ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА.

*А.Г.Аронов, А.С.Иоселевич*

**Предложено новое представление функции Грина уравнения Шредингера в виде функционального интеграла. В этом представлении задача об электроне в случайном потенциале сводится к теоретико-полевой без привлечения метода реплик или суперсимметрии.**

Проблема андерсоновской локализации не может быть решена методами теории возмущений (ТВ) [1]. Поэтому были предприняты попытки сформулировать задачу о движении электрона в случайном потенциале на языке теории поля, допускающем выход за рамки ТВ [2–4]. В этих работах электронная функция Грина (ФГ) представлялась в виде функционального интеграла по некоторой полевой переменной, причем сначала выполнялось усреднение по случайным внешним потенциалам. В результате такого усреднения возникает эффективное нелинейное самодействие электронного поля и задача может решаться полевыми методами.

ФГ электрона в случайном потенциале $U(\mathbf{r})$ в энергетическом представлении записывалась в виде

$$G_E^{R,A}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) = \pm i\, Z_{R,A}^{-1}(E) \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^*\, \psi(\mathbf{r}_2)\overline{\psi}(\mathbf{r}_1) \exp\{\pm i \int d\mathbf{r}\, \overline{\psi}(E - \hat{H} \pm i\delta)\psi\}, \qquad (1)$$

$$Z_{R,A}(E) = \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^* \exp\{\pm i \int d\mathbf{r}\, \overline{\psi}(E - \hat{H} \pm i\delta)\psi\}, \qquad (2)$$

где $\hat{H} = \hat{H}_0 + U(\mathbf{r})$, $\hat{H}_0$ – гамильтониан свободного электрона.

Если бы нормировочный знаменатель $Z_{R,A}$ не зависел от $U$, то усреднение ФГ (1) (или произведения разных ФГ) в гауссовом случае проводилось бы тривиально. Однако если $\psi(\mathbf{r})$ есть обычная однокомпонентная волновая функция, то

$$Z_{R,A}(E) \propto \exp\{-\mathrm{Tr}\ln(-i(E - \hat{H} \pm i\delta))\} \propto \prod_\lambda (E - \epsilon_\lambda \pm i\delta)^{-1}, \qquad (3)$$

где $\epsilon_\lambda$ – собственные значения $\hat{H}$, т.е. $Z_{R,A}$ зависит от вида потенциала. Для устранения этой зависимости в [2] было предложено использовать метод реплик, в котором $\psi(\mathbf{r})$ считается $N$-компонентным вектором, а в конечном выражении $N \to 0$. В последнее время, однако, появились работы, показывающие, что вне рамок ТВ метод реплик может приводить к неправильным результатам[1)].

Другой способ устранения знаменателя $Z$ был предложен в [4] (метод суперсимметрии). Этот метод, в отличие от метода реплик, является математически корректным. Однако введение грассмановых переменных в задаче без взаимодействия, где фермиевская статистика электронов не проявляется, кажется физически неоправданным.

В настоящей работе мы предлагаем новый метод представления полевого интеграла для ФГ, в котором не вводится никаких дополнительных компонент поля и $\psi$ имеет ясный физический смысл однокомпонентной волновой функции, а знаменатель $Z_{R,A} \equiv 1$.

Введение нормировочного знаменателя в теории поля соответствует сокращению несвязных вакуумных диаграмм. Однако ясно, что в одночастичной задаче (описываемой обычным уравнением Шредингера) никакое, даже виртуальное, рождение пар невозможно. Поэтому при корректной записи функционального интеграла необходимости в нормировочном знаменателе не возникает. Заметим, что по той же причине и в фейнмановском интеграле по траекториям [5] также нет нетривиального нормировочного знаменателя.

---

[1)] **Мы благодарны К.Б.Ефетову за сообщение об этих неопубликованных работах.**

Запишем ФГ во временном представлении в виде функционального интеграла по зависящим от времени волновым функциям $\psi(\mathbf{r}, t)$:

$$G^{R,A}(x_2, x_1) = \pm Z^{-1}_{R,A} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \psi(x_2)\psi^*(x_1) \exp(\pm i \int dx\, \psi^* \hat{L}^{R,A} \psi), \qquad (4)$$

$$Z_{R,A} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \exp(\pm i \int dx\, \psi^* \hat{L}^{R,A} \psi), \qquad (5)$$

$$\hat{L}^{R,A} = i\partial_t - \hat{H} \pm i\delta; \quad x \equiv (\mathbf{r}, t). \qquad (6)$$

Для того, чтобы функциональные интегралы (4), (5) имели вполне определенный смысл (см. [6]), их нужно понимать, как пределы конечномерных интегралов, возникающих при введении дискретного времени $t_n = n\Delta$, $n = -N, .., N$. При этом интегрирование по времени $t$ заменяется на суммирование по $n$, а операторы $\hat{L}^{R,A}$ являются пределами конечномерных матриц

$$\tilde{L}^{R,A}_{nn'} = \pm i(\delta_{n'n} - \delta_{n'n\mp 1}) - \Delta(\hat{H}_{n\mp 1/2} \mp i\delta)\delta_{n'n\mp 1}. \qquad (7)$$

Эти матрицы являются треугольными, причем $\tilde{L}^{R+} = \tilde{L}^A$, и у $\tilde{L}^R$ равны нулю все элементы, расположенные над диагональю, а у $\tilde{L}^A$ – под ней. Поэтому очевидно (и это можно показать строго), что $L^R$ генерирует запаздывающую, а $L^A$ – опережающую ФГ:

$$\tilde{G}^{R,A} = (\tilde{L}^{R,A})^{-1}; \quad G^{R,A} = \lim_{\Delta\to 0,\, N\to\infty} \tilde{G}^{R,A}. \qquad (8)$$

Детерминант треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, поэтому $\det(\tilde{L}^{R,A}) = (\pm i)^{2N+1} \neq 0$. Этим условием обеспечивается существование и единственность обратных матриц (8), необходимое для того, чтобы представление (4) имело смысл. Если определить меру в интегралах (4), (5), как

$$\mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^* \equiv \prod_{n=-N}^{N} \pi^{-1} D\,\mathrm{Re}\,\psi(\mathbf{r}, t_n) D\,\mathrm{Im}\,\psi(\mathbf{r}, t_n), \qquad (9)$$

то

$$\tilde{Z}_{R,A} = \det(\mp i L^{RA}) = 1, \quad Z_{R,A} = \lim_{\Delta\to 0,\, N\to\infty} \tilde{Z}_{R,A} = 1. \qquad (10)$$

Таким образом, мы доказали, что выражение (4) можно записывать вообще без нормировочного знаменателя. Это означает, что в представлении (4) гауссово усреднение по $U$ проводится тривиально.

Все сказанное выше справедливо для гамильтониана $\hat{H}(t)$, произвольным образом зависящего от времени. В случае статического $\hat{H}$, записывая (4), (5) в энергетическом представлении, получим:

$$G^{R,A}_E(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \mp i \int D\psi D\psi^* \psi_E(\mathbf{r}_2)\psi^*_E(\mathbf{r}_1) \exp\{\pm i \int dE' d\mathbf{r}\, \psi^*_{E'}(E' - \hat{H} \pm i\delta)\psi_{E'}\}. \qquad (11)$$

Условие (10) в энергетическом представлении имеет вид

$$1 = Z_{R,A} \propto \prod_{E'} Z_{R,A}(E') = \prod_{\lambda} \prod_{E'} (E' - \epsilon_\lambda \pm i\delta)^{-1}. \qquad (12)$$

Пользуясь тем, что все особенности выражения (12) лежат в одной полуплоскости комплексного $E'$, можно убедиться в том, что последнее произведение действительно не зависит от $\epsilon_\lambda$. Для строгого доказательства этого факта нужно преобразовать (10) к энергетическому представлению при конечных $\Delta$ и $N$ и перейти к пределу только после вычисления произведения. Согласно (12) $Z^{-1}_{R,A}(E) \propto \prod_{E'\neq E} Z_{R,A}(E')$, откуда, используя (2), легко доказать тождественность определений (1) и (11).

Таким образом, для того, чтобы избавиться от нетривиального нормировочного множителя необходимо вместо функционального интегрирования по $\psi(\mathbf{r})$ – зависящим только от $\mathbf{r}$, ввести интегрирование по $\psi(\mathbf{r}, t)$ или по $\psi_{E'}(\mathbf{r})$ т. е. по волновым функциям, отвечающим всем энергиям.

Производящий функционал, генерирующий любые произведения $G^R$ и $G^A$, усредненные по гауссову примесному потенциалу, имеет вид

$$Z(\rho_R, \rho_A) = \int \mathcal{D}\, U(\mathcal{D}\,\psi)\exp\{i\int dx(\psi_R^* \hat{L}^R \psi_R - \psi_A^* \hat{L}^A \psi_A +$$

$$+ \rho_R^* \psi_R + \psi_R^* \rho_R - \rho_A^* \psi_A - \psi_A^* \rho_A) - \frac{1}{2}\int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' U(\mathbf{r})\gamma^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')\}, \qquad (13)$$

где $\gamma(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ – коррелятор случайных потенциалов, а интегрирование ведется независимо по $\psi_R(x)$ и $\psi_A(x)$; $(D\psi) \equiv D\psi_R D\psi_R^* D\psi_A D\psi_A^*$. Выполняя интегрирование по $U$ и используя (5), (10), получим

$$Z(\rho_R, \rho_A) = \int(\mathcal{D}\psi)\exp\{iS_{eff} + i\int dx\,[(\bar{\rho}\,\psi) + (\bar{\psi}\rho)]\}, \qquad (14)$$

$$S_{eff} = \int dx(\bar{\psi}\hat{L}_0\psi) + \frac{i}{2}\iint dx dx'\,(\bar{\psi}\psi)_x \gamma(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\bar{\psi}\psi)_{x'}, \qquad (15)$$

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_R \\ \psi_A\end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix}\rho_R \\ \rho_A\end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\psi_R^*, -\psi_A^*), \quad \bar{\rho} = (\rho_R^*, -\rho_A^*), \qquad (16)$$

$$\hat{L}_0 = \begin{pmatrix}\hat{L}_0^R & 0 \\ 0 & \hat{L}_0^A\end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где $\hat{L}_0^{R,A}$ отвечают $U = 0$. Двухчастичная ФГ, связанная с коррелятором плотность-плотность, выражается через производящий функционал следующим образом

$$< G^R(x_2 x_1) G^A(x_2' x_1') > = \left.\frac{\delta^4 Z(\rho_R, \rho_A)}{\delta\rho_A(x_1')\delta\rho_A^*(x_2')\delta\rho_R^*(x_2)\delta\rho_R(x_1)}\right|_{\rho=0} \qquad (18)$$

Аналогично могут быть записаны и формулы для более сложных корреляторов.

Выражение (15), полученное для случайного статического потенциала, находится в прямом соответствии с выражением, полученным в [7] для случайного потенциала, зависящего от времени (фононов). Наличие в (15) корреляции волновых функций при всех временах (всех энергиях) есть следствие статичности потенциала и отражает тот факт, что в выражение для ФГ уравнения Шредингера при данной энергии входят собственные функции, отвечающие всем энергиям.

В интеграле (14) с помощью известного преобразования Хаббарда – Стратоновича можно, подобно [2,3], ввести коллективные переменные ($Q$-матрицы), однако в нашем случае $Q$-матрицы могут описывать корреляцию волновых функций при различных энергиях: $Q_{EE'} \propto$ $\propto < \psi_E \bar{\psi}_{E'} >$.

Авторы благодарны Б.Л.Альтшулеру за полезные обсуждения.

### Литература

1. *Anderson P.W.* Phys. Rev., 1958, **102**, 1008.
2. *Wegner F.* Z. Physik., 1979, **B35**, 207.
3. *Ефетов К.Б., Ларкин А.И., Хмельницкий Д.Е.* ЖЭТФ, 1980, **79**, 1920.
4. *Ефетов К.Б.* ЖЭТФ, 1982, **83**, 833.
5. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
6. *Васильев А.Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: изд. ЛГУ, 1976.
7. *Иоселевич А.С.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 1508.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 декабря 1984 г.