СИММЕТРИЯ ЗЕРКАЛЬНОГО ОТРАЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ГРУППЫ $SU(3)$

А.П.Юцис, А.В.Каросене, С.И.Алишаускас

Не все понятия, имеющиеся в теории представлений группы $SU(2)$, имеют свои обобщения в теории представлений группы $SU(3)$. К таким понятиям относится симметрия зеркального отражения, которая в случае группы $SU(2)$ развита в [1-4] 1). В данной заметке мы укажем возможность введения этого понятия в теорию представлений группы $SU(3)$ и практическую полезность соответствующих свойств симметрии для вычисления коэффициентов Клебша-Гордана.

Если использовать систему фаз, избранную в [5], то аналогом симметрии зеркального отражения в теории группы $SU(3)$ может служить соотношение

$$\varphi(\{N\} I I_z Y) = (-1)^{I_z + \frac{1}{2} Y} \varphi(\{N\} \bar{I} I_z Y) \qquad (1)$$

при

$$I \to \bar{I} = -I - 1 . \qquad (2)$$

Здесь φ представляет собой базисную функцию неприводимого представления $\{N\} = (pq)$. I является квантовым числом изоспина, I_z и Y - квантовые числа проекции изоспина и гиперзаряда соответственно.

Из (1) видно, что подстановка (2) означает переход от представления $D^{\{N\}}_{I I_z Y, I' I'_z Y'}$ к эквивалентному представлению $D^{\{N\}}_{\bar{I} I_z Y, \bar{I}' I'_z Y'}$, получаемому из первого присоединением фазового множителя, равного минус единице в степени $I + \frac{1}{2} Y + I' + \frac{1}{2} Y'$. Равенство (1) приводит к следующему соотношению:

$$\varphi(\{N^*\}, \nu) = \varphi^*(\{N\}, \bar{\nu}), \qquad (3)$$

где $\nu = I I_z Y$, $\bar{\nu} = I I_z Y$.

$$(\bar{I} = -I - 1, \ \bar{I}_z = -I_z, \ \bar{Y} = -Y). \qquad (4)$$

Здесь $\{N^*\}$ обозначает неприводимое представление, контрагредиентное представлению $\{N\}$. Непосредственным следствием равенства (1) является соотношение

$$D^{\{N^*\}}_{\nu\nu'} = D^{\{N\}^*}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'} . \qquad (5)$$

Соотношения (3) и (5) для коэффициентов Клебша-Гордана группы $SU(3)$ дают следующее свойство:

$$\begin{bmatrix}\{N_1\} & \{N_2\} & \{N\}_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\{N_1^*\} & \{N_2^*\} & \{N^*\}_\gamma \\ \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \nu\end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Здесь γ есть дополнительный параметр для выделения повторяющихся представлений.

В практическом отношении важную роль играет случай, когда подстановка (2) применяется к двум столбцам коэффициента Клебша-Гордана при сохранении знаков у I_z и Y. Для этого случая получаем

$$\begin{bmatrix}\{N_1\} & \{N_2\} & \{N\}_\gamma \\ \bar{I} I_{1z} Y & I_2 I_{2z} Y_2 & \bar{I} I_z Y\end{bmatrix} = \qquad (7)$$

$$= (-1)^{p_1+q_1+p+q+I_{2z}+\frac{1}{2}Y_2}\begin{bmatrix}\{N_1\} & \{N_2\} & \{N\}_\gamma \\ I_1 I_{1z} Y_1 & I_2 I_{2z} Y_2 & I I_z Y\end{bmatrix}.$$

Ввиду того что кэффициент Клебша-Гордана группы $SU(3)$ равен произведению коэффициента Клебша-Гордана группы $SU(2)$ на изоскалярный множитель (ср. [6]), использование формулы (9) в работе [I] или формулы (4,3д) в работе [3] приводит к следующему соотношению:

$$\begin{bmatrix}\{N_1\} & \{N_2\} & \{N\}_\gamma \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & \bar{I} Y\end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{p_1+q_1+p+q+I_2-\frac{1}{2}Y_2}\begin{bmatrix}\{N_1\} & \{N_2\} & \{N\}_\gamma \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & I Y\end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Использование этого последнего соотношения позволяет значительно сократить вычислительную работу по выражению изоскалярного множителя через p_1, q_1, I_1, Y_1 при заданных значениях p_2, q_2, I_2, Y_2. Если таблицы составлены без использования указанного свойства, как это имеет место в [7], то соотношение (8) может быть применено для проверки полученных формул. Отметим, что в работе [7] система фаз такова, что в равенстве, соответствующем (8), в фазовом множителе вместо $-Y_2/2$ должно быть $+\varepsilon/2$.

Подстановка (2) может быть интерпретирована как зеркальное отражение оси изоспина в плоскости, перпендикулярной к этой оси, как это имеет место в случае группы $SU(2)$ (ср. [2]).

Кроме (2), в случае группы $SU(3)$ имеют место подстановки

$$p \to -q-2, \quad q \to -p-2, \tag{9}$$

так как собственные значения операторов Казимира F_2 и G_3 являются инвариантами относительно этих подстановок. Это видно из (18) и (19) работы [8], если только учесть, что в [8] стоит p вместо наших $p+q$, а q имеет такое же определение, как и в настоящей заметке. Нетрудно установить фазовые соотношения при подстановках (9) и найти соответствующую геометрическую интерпретацию.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Институт физики и математики Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию 10 апреля 1965 г.

Литература

[1] А.А.Бандзайтис, А.В.Каросене, А.Ю.Савукинас, А.П.Юцис. ДАН СССР, 154, 812, 1964.

[2] А.А.Бандзайтис, А.Ю.Савукинас, А.П.Юцис. ЖЭТФ, 47, 385, 1964.

[3] А.П.Юцис, А.Ю.Савукинас, А.А.Бандзайтис, А.В.Каросене, Э.П.Нашленас, Лит.физ.сб., 4, 173, 1964.

[4] А.В.Каросене, А.Ю.Савукинас, А.А.Бандзайтис, Я.И.Визбарайте, А.П.Юцис. Лит.физ.сб., 4, 187, 1964.

[5] J.J.de Swart.Rev. Mod. Phys., 35, 916, 1963. (русс. перев., УФН, 84, 651, 1964).

[6] A.R.Edmonds.Proc.Roy.Soc., A268, 567, 1963.

[7] K.T.Hecht.Nucl.Phys., 62, 1, 1965.

[8] G.E.Baird,L.C.Biedenharn. J.Math.Phys., 4, 1449, 1963.

---

1) В [2] вкралась опечатка. В четвертой строке снизу третьего абзаца на стр. 386 вместо б и в должно быть в и г.