ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА ДЛЯ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ

А.М.Переломов, В.С.Попов

В последнее время интенсивно развивается групповое направление в теории элементарных частиц, причем с наибольшим успехом для описания симметрий элементарных частиц применяются группы $U(n)$ и $SU(n)$. В связи с этим представляет интерес нахождение всех инвариантных операторов, которые можно образовать из генераторов группы. Хотя эта задача и рассматривалась ранее [I-3], явные выражения для собственных значений инвариантных операторов произвольного порядка в литературе отсутствуют. Ниже дается решение этой задачи.

Генераторы групп $U(n)$ и $SU(n)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left[A^i_j, A^k_l\right] = \delta^k_j A^i_l - \delta^i_l A^k_j, \qquad (I)$$

причем в случае группы $SU(n)$ выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} A^i_i = 0$. Инвариантный оператор (или оператор Казимира) произвольного порядка p имеет вид:

$$C_p = \sum_{i_1,\dots i_p=1}^{n} A^{i_1}_{i_2} A^{i_2}_{i_3} \dots A^{i_p}_{i_1}. \qquad (2)$$

Используя (I) и перестановочные соотношения между A^i_j и произвольным тензорным оператором T^k_l, из (2) получаем[I)]:

$$C_p(f_1, \dots f_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (a^p)_{ij}, \qquad (3)$$

где $C_p(f_1, \dots f_n)$ есть собственное значение оператора (2) для неприводимого представления, задаваемого схемой Юнга $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$; f_i – число клеток в i-й строке, $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \dots \geqslant f_n \geqslant 0$, причем для группы $SU(n)$ $f_n = 0$. Матрица a имеет вид:

$$a_{ij} = (m_i + n - i)\delta_{ij} - \theta_{ij}, \quad \theta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i < j \\ 0, & \text{при } i \geqslant j \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $m_i = f_i$ для группы $U(n)$, $m_i = f_i - \frac{f}{n}$ для группы $SU(n)$; $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$.

Из формулы (3) вытекает связь между операторами Казимира для групп $U(n)$ и $SU(n)$:

$$C_p^{(U)} = \sum_{\alpha=0}^{p} \frac{p!}{\alpha!\,(p-\alpha)!} \left(\frac{f}{n}\right)^{p-\alpha} C_\alpha^{(SU)};$$

$$C_p^{(SU)} = \sum_{\alpha=0}^{p} \frac{p!}{\alpha!\,(p-\alpha)!} \left(\frac{f}{n}\right)^{p-\alpha} C_\alpha^{(U)},$$

где $C_0^{(U)} = C_0^{(SU)} = n$, $C_1^{(U)} = f$, $C_1^{(SU)} = 0$. (5)

Вводя $L_i = m_i + n - i$, можно преобразовать (3) к следующему виду:

$$C_p = \sum_{i=1}^{n} L_i^p - \sum_{\alpha+\beta=p-1} \sum_{i<j} L_i^\alpha L_j^\beta + \dots + (-)^p \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} 1 \tag{6}$$

Каждый член ряда (6) является симметричной функцией от $L_1, L_2, \dots L_n$ и может быть выражен через стандартные функции $S_\alpha = \sum_{i=1}^{n} [L_i^\alpha - (n-i)^\alpha]$.

Приведем соответствующие формулы для первых шести операторов Казимира группы $SU(n)$:

$$C_1 = 0,\ C_2 = S_2,\ C_3 = S_3 - (n - \tfrac{3}{2}) S_2,$$
$$C_4 = S_4 - (n-2) S_3 - \tfrac{1}{2}(3n-4) S_2,$$
$$C_5 = S_5 - (n - \tfrac{5}{2}) S_4 - \tfrac{1}{2} S_2^2 - \tfrac{2}{3}(3n-5) S_3 - \tfrac{1}{2}(4n-5) S_2, \quad (7)$$
$$C_6 = S_6 - (n-3) S_5 - S_3 S_2 - \tfrac{5}{2}(n-2) S_4 + \tfrac{1}{2}(n-3) S_2^2 - \tfrac{5}{3}(2n-3) S_3 - \tfrac{1}{2}(5n-6) S_2.$$

Заметим, что значение C_2 совпадает с полученным ранее Рака [5], а C_3 и C_4 совпадают со значениями, полученными в [3]. В случае группы SU (6) приведенные в (7) операторы C_p дают полный набор независимых инвариантов, которые можно построить из A^i_j. Из (7) в качестве частного случая получаем формулы для операторов Казимира группы SU (3):

$$C_2 = \tfrac{2}{3}(p^2 + q^2 + pq + 3p + 3q),$$

$$C_3 = \tfrac{1}{9}(p-q)\left[(p+2q)(2p+q) + 9(p+q+1)\right] + \tfrac{3}{2} C_2, \quad (8)$$

уже нашедшие применение в расчетах [6].

Простейшими представлениями групп $U(n)$ и $SU(n)$ являются полностью симметричные представления $\{f\}$ и полностью антисимметричные представления $\{1^k\}$. С помощью (3) можно найти собственные значения всех операторов C_p для этих представлений:

$$C_p(\{f\}) = f(f+n-1)^{p-1},$$
$$C_p(\{1^k\}) = k(n-k+1)^{p-1}. \quad (9)$$

Эти формулы относятся к группе $U(n)$; значения C_p для группы $SU(n)$ могут быть получены отсюда

с учетом (5). Более подробное изложение полученных результатов будет опубликовано отдельно.

Авторы выражают искреннюю благодарность И.С.Шапиро за обсуждение результатов работы.

Поступило в редакцию
4 мая 1965 г.

Литература

[1] И.М.Гельфанд.Матем. сб.,26, 103, 1950.

[2] G.E.Baird, L.C. Biedenharn. J.Math. Phys., 4,436, 1449, 1963.

[3] M.Umezawa. Nucl. Phys.,48, 111, 1963; 53, 54,1964; 57,65,1964.

[4] M.Micu. Nucl. Phys.,60,353, 1964.

[5] G.Racah. Group theory and spectroscopy, Lecture notes, Princeton, 1951.

[6] S.P.Rosen. Phys. Rev.,135B, 1041, 1964.

---

1) Метод, примененный нами для получения формулы (3), использует некоторые идеи из работы [4] .