О НЕСОВМЕСТНОСТИ РЕЛЯТИВИЗОВАННОЙ $SU(6)$-СИММЕТРИИ С УНИТАРНОСТЬЮ

Б.В.Гешкенбейн, Б.Л.Иоффе, М.С.Маринов,
В.И.Рогинский

I. В последнее время появился ряд работ, посвященных релятивистскому обобщению $SU(6)$ - симметрии, целью которых является построение элементов S - матрицы, инвариантных относительно группы Лоренца ($\mathcal{L}$), группы $SU(3)$ и в статическом пределе $SU(6)$ инвариантных (например, [1, 2]). Подобные теории устанавливают некоторые линейные соотношения между инвариантными амплитудами при произвольных импульсах. С другой стороны, таких соотношений до сих пор не удавалось получить на основе инвариантности относительно какой-либо точной группы (а не "самонарушающейся", как в существующих теориях), которая включала бы прямое произведение $\mathcal{L} \times SU(3)$ в качестве нетривиальной подгруппы. Причина этого в том, что существование такой общей группы находится в конфликте со свободными уравнениями движения. Но соотношения, не имеющие группового происхождения, вообще говоря, противоречат унитарности. Цель настоящей заметки состоит в выяснении конкретной структуры и степени этого противоречия на простых примерах. Мы рассмотрим амплитуды рассеяния синглетного состояния на кварке и кварка на кварке в схеме $\widetilde{U}(12)$ [1]. Возникающие трудности, по-видимому, характерны для любой релятивизации $SU(6)$.

2. Рассмотрим амплитуду рассеяния бесспиновой частицы, являющейся унитарным синглетом, на кварке. Эта амплитуда имеет вид $A + B(\hat{q}_1 + \hat{q}_2)/2$. Согласно схеме $\widetilde{U}(12)$,

$$B = 0. \tag{1}$$

В силу (1) упругая унитарность накладывает на одну комплексную функцию A два вещественных условия. Выясним, имеет ли решение эта система уравнений. Для этой цели воспользуемся разложением амплитуды рассеяния по парциальным волнам (см., напр., [3]). Преобразуя эти разложения в предположении их сходимости, мы можем записать условие (I) в виде совокупности равенств для парциальных волн:

$$f^+_{\ell-1} - f^-_{\ell+1} + \varkappa (f^-_\ell - f^+_\ell) = 0, \qquad \ell = 1, 2, \ldots, \quad (2)$$

где

$$f^\pm_\ell = p^{-1} \exp(i\delta^\pm_\ell) \sin\delta^\pm_\ell, \qquad \varkappa = (\varepsilon+m)/(\varepsilon-m), \quad (3)$$

а $\delta^\pm_\ell$ - фазы рассеяния с $j = \ell \pm 1/2$ соответственно.

В области энергий, где справедливо упругое условие унитарности, фазы $\delta^\pm_\ell$ вещественны, что позволяет разрешить уравнение (2) при заданном ℓ относительно δ^+_ℓ и $\delta^-_{\ell+1}$. Уравнение (2) имеет два решения:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & \delta^-_{\ell+1} = \delta^-_\ell + \delta^+_\ell - \delta^+_{\ell-1} & \mathrm{II}\ \delta^+_\ell = \delta^-_\ell \\ & \sin(\delta^-_{\ell+1} - \delta^+_{\ell-1}) = \varkappa \sin(\delta^-_\ell - \delta^+_\ell) & \quad \delta^-_{\ell+1} = \delta^+_{\ell-1} \end{array} \quad (4)$$

Выбирая для каждого значения ℓ любое из решений I или II, мы можем выразить все фазы $\delta^\pm_\ell$ через две: δ_0 и δ^+_1. Легко показать, что при произвольном чередовании решений I и II фазы не стремятся к нулю при $\ell \to \infty$. Например, выбор при всех значениях ℓ решений типа I дает:

$$\delta^+_\ell = \ell\delta^+_1 - (\ell-1)\delta_0, \quad \delta^-_\ell = (\ell-1)\delta^+_1 - (\ell-2)\delta^+_0 + \alpha,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = (\varepsilon/m)\operatorname{tg}(\delta_0 - \delta^+_1). \quad (5)$$

Сходящийся ряд получается лишь в том случае, когда все $\delta^\pm_\ell = 0$.

Если предположить, что схема $\widetilde{U}$(I2) нарушается при больших ℓ, что могло бы обеспечить сходимость, то решение уравнения (4) все равно осталось бы не имеющим физического смысла, так как эти уравнения противоречат пороговому поведению фаз $\delta_\ell^{\pm} \sim p^{2\ell+1}$. Нужно заметить, что соотношения (2) приводят к парадоксальным выводам даже в случае отказа от требования упругой унитарности. А именно, из (2) следует, что, если имеется резонанс, то он должен присутствовать во всех парциальных волнах. Найдем далее с помощью (2) скачок парциальной амплитуды $\Delta f_\ell^{\pm}$ вблизи порога образования n бесспиновых частиц (таких, что произведение внутренних четностей частиц в начале и в конце одинаково). Используя пороговое поведение $\Delta f_\ell^{\pm}$ и положительность $Im\Delta f_\ell^{\pm}$, нетрудно показать, что, в силу (2), $\Delta f_\ell^{\pm} \equiv 0$ [I].

3. В схеме $\widetilde{U}$(I2) амплитуда упругого рассеяния кварка на кварке имеет вид:

$$\Phi_1 \bar{\psi}^A(p_1')\psi_A(p_1)\cdot\bar{\psi}^B(p_2')\psi_B(p_2) + $$
$$+ \Phi_2 \bar{\psi}^A(p_2')\psi_A(p_1)\cdot\bar{\psi}^B(p_1')\psi_B(p_2), \qquad (6)$$

где Φ_1 и Φ_2 - инвариантные функции. Рассмотрим упругое рассеяние двух одинаковых кварков. Используя обозначения работы [4], выразим амплитуды F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, стоящие при фермиевских вариантах, через Φ_1 и Φ_2:

$$F_1 = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad F_2 = F_4 = \frac{1}{4}(\Phi_1 - \Phi_2), \quad F_3 = F_5 = 0. \qquad (7)$$

Упругое условие унитарности связывает две комплексные функции Φ_1 и Φ_2 (т.е. четыре вещественных функции) пятью вещественными уравнениями. Эта система уравнений могла бы иметь нетривиальное решение лишь в том случае, если бы уравнения оказались зависимыми. Используя разложение амплитуды рассеяния по парциальным волнам, можно показать, что уравнения независимы и, следовательно, амплитуда рассеяния равна нулю. Даже без требования упругой унитарности, так же как и в предыдущем разделе, из существования резонанса в одной парциальной волне вытекает наличие резонансов во всех парциальных волнах.

4. Рассмотренные нами примеры просты, но не реальны, поскольку предполагают существование кварков. Однако трудно ожидать, чтобы можно было согласовать схему $\tilde{U}(12)$ с унитарностью в более реальных случаях. Например, в схеме $\tilde{U}(12)$ процессы $\underline{56} + \underline{56} \to \underline{56} + \underline{56}$ или $\underline{56} + \underline{35} \to \underline{56} + \underline{35}$ описываются всего четырьмя амплитудами каждый вместо несколько сот амплитуд, необходимых в обычной теории. Маловероятно, что унитарная S - матрица может вытерпеть подобное насилие.

Интересно выяснить, каким образом необходимо нарушить симметричную схему, чтобы теория могла быть сделана унитарной, и не сведется ли при этом симметрия к $\mathcal{L} \times SU(3)$.

После того, как работа была закончена, авторы получили препринт Бега и Пайса [5], в котором рассматривается проблема унитарности в релятивизованной $SU(6)$-симметрии и отмечаются возникающие при этом трудности.

Авторы выражают глубокую благодарность В.Н.Грибову, И.Ю.Кобзареву, И.Я.Померанчуку и К.А.Тер-Мартиросяну за обсуждение и ценные замечания.

Отделение ядерной физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
10 мая 1965 г.

Литература

[1] R.Delbourgo, A.Salam, J.Strathdee. Proc.Roy.Soc., A284,146, 1965.

[2] M.A.B.Beg, A.Pais. Phys. Rev. Lett.,14, 267, 1965.

[3] G.F.Chew, M.L.Goldberger, F.E.Low, Y.Nambu. Phys. Rev., 106, 1337, 1957.

[4] M.L.Goldberger, M.T. Grisaru, S.W.MacDowell , D.Y.Wong. Phys.Rev.,120, 2250, 1960.

[5] M.A.B. Beg, A.Pais. Preprint, 1965.

---

1) На это обстоятельство обратили наше внимание В.Н.Грибов и И.Я. Померанчук.