Письма в ЖЭТФ, том 9, стр. 679 – 683 *20 июня 1969г.*

НЕЛИНЕЙНАЯ РАДИАЛЬНАЯ САМОФОКУСИРОВКА МОДУЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЛАЗМЕ

В.Б.Красовицкий

Взаимодействие сильно модулированного электронного пучка, представляющего собой последовательность заряженных дисков с поверхностной плотностью заряда $\sigma(r)$, расположенных на расстоянии ℓ друг от друга и движущихся со скоростью v_0, с плазмой можно описать, вводя в уравнения Максвелла для полей, создаваемых пучком, диэлектрическую постоянную плазмы

$$\epsilon(\omega_M) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_M^2}.$$

Эта величина достаточно хорошо описывает электромагнитные свойства плазмы, если частота модуляции пучка $\omega_M = 2\pi v_0/l$ близка к плазменной частоте ω_p: $|\omega_M - \omega_p| << \omega_p$. Так как частота ω_M определяется лишь параметрами пучка и не зависит от плотности плазмы, то при выполнении условия $\omega_M < \omega_p$ диэлектрическая постоянная плазмы оказывается отрицательной и кулоновское расталкивание электронов пучка сменяется притяжением. В случае, когда поперечные размеры сгустков r_0 велики по сравнению с расстоянием между ними: $r_0 >> \ell$ и, следовательно, поле, создаваемое сгустками, направлено вдоль направления движения пучка ($E_z > E_r$, где E_z и E_r – соответственно продольная и поперечная составляющие поля пучка), этот эффект приводит к смещению сгустков в продольном направлении, в результате чего в системе плазма-пучок развивается неустойчивость на частоте $\omega = \omega_M < \omega_p$ [1]. В обратном предельном случае $r_0 << \ell$, который мы подробно рассмотрим ниже, поперечная компонента поля E_r значительно превосходит продольную E_z и основным эффектом является взаимодействие электронов каждого сгустка с поперечным полем, приводящее к радиальному сжатию пучка. Стационарное состояние устанавливается, когда фокусирующая кулоновская сила сравнивается с силой, обусловленной градиентом кинетического давления в пучке, приводящей к дефокусировке.

Уравнения для полей, создаваемых пучком, имеют вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r\,\partial z} - \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} = -\frac{\hat{\epsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2};$$

$$\hat{\epsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right] = 4\pi e\,\sigma(r)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(z - v_0 t - n\ell). \tag{1}$$

Здесь оператор $\hat{\epsilon}$ описывает электромагнитные свойства плазмы. Используя периодичность системы вдоль координаты z, представим функции E_r и E_z в виде рядов Фурье. Тогда для компонент Фурье $E_r^k(r,t)$ и $E_z^k(r,t)$ получим следующую систему уравнений:

$$i\frac{2\pi k}{l}\frac{\partial E_z^k}{\partial r} - \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2 E_r^k = \frac{\hat{\epsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 E_r^k}{\partial t^2};$$

$$\hat{\epsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r^k) + \frac{2\pi k}{\ell}E_z^k\right] = \frac{4\pi e\,\sigma(r)}{\ell}e^{-ik\omega_M t};\quad \omega_M = \frac{2\pi v_0}{\ell}. \tag{2}$$

Так как зависимость полей от времени определяется множителем $\exp(-i k\omega_M t)$, а оператор $\hat{\epsilon}$, действуя на эту функцию, умножает ее на $\epsilon(k\omega_M)$, то из первого уравнения системы (2), находим:

$$E_r^k(r) = i\,\frac{\ell}{2\pi k}\,\frac{1}{\dfrac{v_o^2}{c^2}\,\epsilon(k\omega_M) - 1}\,\frac{d E_z^k}{dr}\,. \tag{3}$$

Если предположить, что поперечные размеры сгустков r_o малы по сравнению с расстоянием между ними: $r_o \ll \ell$, то согласно (3), имеем $E_z^k \sim k(r_o/\ell)\,E_r^k$. Поэтому для не слишком высоких гармоник $k \ll \ell/r_o$ продольная компонента поля E_z^k оказывается малой по сравнению с поперечной E_r^k и ею можно пренебречь во втором уравнении системы (2)[1]. Домножая после этого обе части уравнения на $\exp(i(2\pi k/\ell)z)$ и суммируя по гармоникам, получим уравнение для поля $E_r(r)$, действующего на каждый сгусток $z_n = v_o t + n\ell$:

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left[r\,E_r(r)\right] = \frac{4\pi e\,\sigma(r)}{\ell}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\epsilon(k\omega_M)}\,. \tag{4}$$

Перед тем, как вычислить сумму, входящую в правую часть уравнения (4), отметим, что, так как при $k \to \infty$ $\epsilon(k\omega_M) \to 1$, то мы имеем дело с расходящимся рядом. Для того, чтобы улучшить его сходимость, нужно заменить $1/\epsilon$ на $(1/\epsilon) - 1$ под знаком суммы, что эквивалентно вычитанию из полного поля пучка в среде поля, создаваемого пучком в вакууме, то есть при $\epsilon = 1$ [2]. Подставляя в (4)

$$\epsilon(k\omega_M) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2\omega_M^2}$$

и суммируя по k, найдем [3]:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) = -\pi\,\frac{\omega_p}{\omega_M}\,\frac{\cos\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_M}\pi\right)}{\sin\left[\left(1 - \dfrac{\omega_p}{\omega_M}\right)\pi\right]} \xrightarrow[\omega_M \to \omega_p]{} \frac{2}{\epsilon(\omega_M)}\,. \tag{5}$$

Таким образом, согласно (5), при $|\omega_M - \omega_p| \ll \omega_p$ в сумме, стоящей в правой части уравнения (4), достаточно удержать лишь члены с $k = 1$.

---

1) При $k \gtrsim 1/r_o \gg 1$ продольная компонента поля E_z^k сравнивается с поперечной. Однако вклад таких высоких гармоник в разложении Фурье достаточно мал (порядка $1/k$ по сравнению с первыми).

Зависимость плотности пучка $\sigma(r)$ от поля можно определить из условия равновесия электронов пучка в поперечном направлении. Для этого необходимо, чтобы в системе отсчета пучка фокусирующая кулоновская сила компенсировала дефокусирующую силу, обусловленную градиентом кинетического давления в пучке:

$$\frac{e}{m}\sigma(r)E_r(r) - \frac{1}{2}v_T^2\frac{d\sigma}{dr} = 0; \quad v_T^2 = \frac{2\kappa T}{m}. \tag{6}$$

Подставляя в уравнение (6) $E_r(r) = -d\phi/dr$, определим зависимость $\sigma(r)$ от $\phi(r)$:

$$\sigma(r) = \sigma(0)\exp\left(-\frac{2e\phi}{mv_T^2}\right), \tag{7}$$

где $\sigma(0)$ – плотность на оси пучка.

Сравнивая формулы (4) и (7), найдем уравнение для функции $\Phi(r) = 2e\phi(r)/mv_T^2$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = -4\frac{\omega_b^2}{v_T^2}\frac{1}{\epsilon(\omega_M)}\ell^{-\Phi}; \quad \omega_b^2 = \frac{4\pi e^2\sigma(0)}{m\ell}. \tag{8}$$

Это уравнение при $\epsilon(\omega_M) = -|\epsilon(\omega_M)| < 0$ имеет решение $\Phi = 2\ln\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}\right)$, где $r_o^2 = 2\frac{v_T^2}{\omega_b^2}|\epsilon|$. Распределение плотности пучка по радиусу определим, подставляя $\Phi(r)$ в формулу (7):

$$\sigma(r) = \frac{\sigma(0)}{\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}\right)^2}. \tag{9}$$

Так как, согласно формуле (9), плотность пучка остается почти постоянной при $r \lesssim r_o$ и быстро убывает при $r > r_o$, то величина $r_o = \sqrt{2}\frac{v_T}{\omega_b}|\epsilon|^{1/2}$ – представляет собой эффективный радиус пучка [4].

Условие рассмотренного выше приближения $r_o \ll \ell$, когда основным нелинейным эффектом является радиальное сжатие пучка, приводит к следующему ограничению на параметры пучка и плазмы:

$$\frac{v_T^2}{v_o^2}|\epsilon| \ll \frac{\omega_b^2}{\omega_p^2}. \tag{10}$$

При заданной плотности плазмы это неравенство может быть легко выполнено для сильноточных пучков с малым тепловым разбросом по поперечным скоростям.

В заключение отметим, что поскольку эффект самосжатия пучка может привести к значительному уменьшению его радиуса при большой плотности тока в пучке, то инкремент нарастания колебаний γ, генерируемых таким пучком в плазме также уменьшится по сравнению со случаем неограниченного пучка: $\gamma \sim (r_o/\ell)^{2/3} (\omega_b/\omega_p)^{2/3} \omega_p$. Очевидно, что этот эффект успеет проявиться, если время сжатия пучка $\sim 1/\omega_b$ окажется меньшим времени развития неустойчивости $\sim 1/\gamma$, т.е. при

$$\omega_b \gtrsim \omega_p \left(\frac{v_T}{v_o}\right)^{2/3} |\epsilon|^{1/3}$$

Автор благодарен К.К. Намитокову за обсуждение результатов работы.

Поступила в редакцию
21 апреля 1969 г.

Литература

[1] В.Б. Красовицкий, В.И. Курилко, М.А. Стржемечный. Атомная энергия, 24, 545, 1968.
[2] Л.Л. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1959, стр. 435.
[3] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений, Физматгиз, 1962, стр. 54.
[4] Г.И. Будкер. Атомная энергия, 1, 9, 1956.