Письма в ЖЭТФ, том 9, стр. 686 – 689 *20 июня 1969 г.*

СТРУКТУРА ЛЭМБОВСКОГО ПРОВАЛА ДЛЯ ДОЛГОЖИВУЩИХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕННО ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛЯХ

С.Г.Раутиан, А.М.Шалагин

Наиболее перспективный способ стабилизации частоты лазерного излучения основан на применении поглощающей газовой ячейки [1 – 3]. Спектральная ширина пика в выходной мощности, по которому осуществляется стабилизация, определяется временем когерентного взаимодействия атомной системы с полем. В связи с этим особый интерес представляют долгоживущие системы, т.е. с малой шириной уровней Γ. В ряде работ (см., например, [4, 5]) анализировались квантовые генераторы на пучке молекул. Спектральная ширина пика мощности здесь определяется лишь временем пролета $\bar{\tau}$ световой волны для средней тепловой скорости v, если $\Gamma \ll 1/\tau$. Естественно возникает вопрос, является ли этот результат общим, или же можно создать лазеры, в которых параметры спектральных структур будут определяться величиной Γ, несмотря на то, что $\Gamma \ll 1/\tau$. Ниже будет показано, что в обычных, не пучковых, системах при некоторой конфигурации поля определяющую роль играют не среднетепловые, а медленные атомы, для которых время пролета больше или порядка $1/\Gamma$. Следовательно, создать такие лазеры можно.

Стационарные уравнения для матрицы плотности в случае стоячей монохроматической волны имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\left(\Gamma_j + v\frac{\partial}{\partial z} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_j = q_j(u,\ v) \pm 2\,\mathrm{Re}\,\{i\,G(x)\,\rho_{mn}\cos kz\}; \quad j = m, n \\
&\left(\Gamma - i\,\Omega + v\frac{\partial}{\partial z} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_{mn} = i\,G(x)\,(\rho_m - \rho_n)\cos kz; \quad \Omega = \omega - \omega_{mn},
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где v, w –, z- и x-компоненты скорости, q_j – скорость возбуждения уровня j. Зависимость амплитуды поля от поперечной координаты x для простоты выберем в виде:

$$
G(x) = \begin{cases} G & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \ell \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases} \qquad (2)
$$

Тогда мощность вынужденного излучения (при учете первой поправки на насыщение), усредненная по v и по x в промежутке $(0, \ell)$ есть:

$$
\langle p(\tau)\rangle_v = p_o\left\{1 - \frac{G^2}{4}\left[\frac{1}{\Gamma_m\Gamma}\left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\Omega^2}\right) - \frac{\Gamma^2(1-\ell^{\Gamma_m\tau}) - \Gamma_m^2(1-\ell^{\Gamma\tau})}{\tau\,\Gamma_m^2\,\Gamma^2(\Gamma-\Gamma_m)}\right.\right. -
$$

$$- \mathrm{Re}\,\frac{(\Gamma+i\,\Omega)^2(1-\ell^{-\Gamma_m r}) - \Gamma_m^2(1-\ell^{-(\Gamma+i\,\Omega)\,r})}{r\;\Gamma_m^2(\Gamma+i\,\Omega)^2(\Gamma+i\,\Omega-\Gamma_m)} + \text{аналог, члены с } \Gamma_n\}, \quad (3)$$

$$r = \frac{\ell}{u}; \quad p_o = \hbar\,\omega_{mn}\,\frac{G^2 N\sqrt{\pi}}{kv}\,\ell^{-\left(\frac{\Omega}{kv}\right)^2}.$$

Проанализируем выражение (3) в интересующем нас случае $\Gamma\bar{r} = \Gamma\ell/\bar{v} \ll 1$. Для атомов со скоростями $u > \Gamma\ell$

$$\langle p(r)\rangle_v = p_o\left(1 - \frac{G^2}{6}\frac{\ell^2}{u^2}\right). \quad (4)$$

Для атомов, у которых $u < \Gamma\ell$

$$\langle p(r)\rangle_v = p_o\left\{1 - \frac{G^2}{4\Gamma}\left(\frac{1}{\Gamma_m} + \frac{1}{\Gamma_n}\right)\left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\Omega^2}\right)\right\}. \quad (5)$$

Частотная зависимость для медленных атомов, как и должно быть, совпадает с таковой в обычной "однородной" задаче. Сравним по порядку величины вклад тех и других атомов в тот член формулы (3), который ответственен за лембовский провал, усредняя с различными характерными распределениями $W(u)$ по поперечным скоростям $u\,(\Gamma=\Gamma_m=\Gamma_n;\ \Omega=0)$:

$W(u)$	$u < \Gamma\ell$	$u > \Gamma\ell$	
$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,v}\,\ell^{-\frac{u^2}{\bar{v}^2}}$	$G^2\frac{\bar{r}}{\Gamma}$	$\frac{1}{3}G^2\frac{\bar{r}}{\Gamma}$	(6)
$\frac{2u}{\bar{v}^2}\,\ell^{-\frac{u^2}{\bar{v}^2}}$	$G^2\,\bar{r}^2$	$\frac{G^2}{4}\ln\frac{1}{\Gamma\bar{r}}$	(6')
$\frac{4u^2}{\sqrt{\pi}\,\bar{v}^3}\,\ell^{-\frac{u^2}{\bar{v}^2}}$	$\frac{1}{2}G^2\,\Gamma\,\bar{r}^3$	$\frac{1}{3}G^2\,\bar{r}^2$.	(6")

Из (6) видно, что только в третьем случае можно пренебрегать ролью медленных атомов при определении структуры лэмбовского провала. В первом же случае вклад их основной. Наконец, во втором случае эффективный интервал скоростей больше $\Gamma\ell$, но существенно меньше $\bar{v}$.

Таким образом, в зависимости от того, с каким весом входят медленные атомы в распределение по скоростям u, они могут дать: а) основной, б) заметный, в) ничтожный вклад в форму лэмбовского провала.

Рассмотрим четыре типа конфигурации поля стоячей световой волны: 1) световая волна не ограничена во всех направлениях (известная "однородная" задача); 2) одномерная задача – ограничение только по x; 3) двумерная задача – ограничение по x и y; 4) трехмерная задача – ограничение по x, y, z, но длина резонатора значительно больше длины волны $\lambda = 2\pi/k$. В случае 2) усреднение по u нужно, очевидно, производить с распределением (6), а в случаях 3) и 4), – с распределением (6').

Запишем формулы, определяющие амплитуду установившегося поля вблизи порога генерации ($\Gamma = \Gamma_m = \Gamma_n$; $\Omega \bar{\tau} \ll 1$).

$$G^2/\Gamma^2 = 2(\eta-1)\left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\Omega^2}\right)^{-1} \text{ – "однородная" задача,} \tag{7}$$

$$G^2\bar{\tau}/\Gamma = 2\sqrt{\pi}(\eta-1)\left(1 + \frac{\operatorname{arctg}(\Omega/\Gamma)}{\Omega/\Gamma}\right)^{-1} \text{ – одномерная задача,} \tag{8}$$

$$G^2\bar{\tau}^2 = \frac{8(\eta-1)}{\ln\frac{1}{\Gamma\bar{\tau}}}\left(1 + \frac{\ln \Gamma\bar{\tau}\sqrt{1+\Omega^2/\Gamma^2}}{\ln \Gamma\bar{\tau}}\right)^{-1} \text{ – двухмерная и трехмерная задача.} \tag{9}$$

Здесь η – превышение возбуждения над пороговым.

В одномерном случае, как и в "однородном", ширина провала определяется Γ, в двухмерном и трехмерном – $\sqrt{\Gamma/\bar{\tau}}$, а не $1/\bar{\tau}$, как в пучковых системах. При $\Gamma\bar{\tau} \ll 1$ имеем, очевидно, $\sqrt{\Gamma/\bar{\tau}} \ll 1/\bar{\tau}$.

Надежность "привязки" резонатора к частоте перехода ω_{mn} определяется кривизной провала в его центре. Вблизи центра провала, т.е. при $\Omega/\Gamma \ll 1$ имеем соответственно:

$$G^2 \sim 1 + \frac{\Omega^2}{2\Gamma^2}, \tag{10}$$

$$G^2 \sim 1 + \frac{\Omega^2}{6\Gamma^2}, \tag{11}$$

$$G^2 \sim 1 + \frac{\Omega^2}{4\Gamma^2 \ln(1/\Gamma\bar{\tau})}. \tag{12}$$

В (10) и (11) вторая производная пропорциональна Γ^2, т.е. обратно пропорциональна квадрату ширины провала. В практически важных двухмерном и трехмерном случаях вторая производная равна $(2\Gamma^2 \ln 1/\Gamma\bar{\tau})^{-1}$, в то время как обратный квадрат полуширины есть $\bar{\tau}/\Gamma$. Их отношение – $(2\Gamma\bar{\tau} \ln 1/\Gamma\bar{\tau})^{-1}$, так что параметр, определяющий надежность стабилизации частоты, может быть существенно меньше ширины провала и определяется, практически, шириной уровней Г.

Институт физики полупроводников
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
28 апреля 1969 г.

Литература

[1] P.H. Lee, M.L. Skolnick. Appl. Phys. Lett., 10, 303, 1967.
[2] В.С. Летохов. Письма в ЖЭТФ, 6, 597, 1967.
[3] В.Н. Лисицын, В.П. Чеботаев. ЖЭТФ, 54, 419, 1968.
[4] А.Н. Ораевский. Молекулярные генераторы. М., Изд. Наука, 1964.
[5] Н.Г. Басов, В.С. Летохов. УФН, 4, 96, 1968.

Письма в ЖЭТФ, том 9, стр. 689 – 692 *20 июня 1969г.*

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГАЗА СОЛИТОНОВ

Г.М.Заславский

К уравнению Кортевега-де-Вриза

$$v_t + v_x + vv_x + v_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

приводятся различные задачи, описывающие распространение нелинейных волн в средах с дисперсией [1]. Существующие алгоритмы [2, 3] построения решений (1) практически отказывают в тех случаях, когда начальный профиль $v(x, 0)$ имеет сложный вид и приводит к образованию очень большого числа уединенных волн (солитонов):

$$v = 3a\,\mathrm{ch}^2\,[\sqrt{a}(x - ut)/2], \quad a = u - 1 > 0, \qquad (2)$$

где u – скорость волны и в дальнейшем $a \ll 1$. В то же время такая ситуация характерна для турбулентной среды и исследование ее представляет большой интерес. Ниже развивается статистический метод исследования (1), приводящий к возможности использования представления о больцмановском "газе" солитонов.

Гамильтоновский формализм для (1) имеет вид:

$$H \frac{1}{2} \int dq\,(1-q^2)\,v(q)\,v(-q) + \frac{1}{6}\int dq_1\,dq_2\,dq_3\,v(q_1)\,v(q_2)\,v(q_3)\,\delta(q_1+q_2+q_3) \qquad (3)$$

$$v = \int dq\, e^{iqx}\, v(q); \qquad v(-q) = v^*(q); \qquad \dot{v}(q) = iq\,\frac{\delta H}{\delta v(-q)} \quad .$$