зации частоты, может быть существенно меньше ширины провала и определяется, практически, шириной уровней Γ.

Институт физики полупроводников
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
28 апреля 1969 г.

Литература

[1] P.H. Lee, M.L. Skolnick. Appl. Phys. Lett., **10**, 303, 1967.
[2] В.С. Летохов. Письма в ЖЭТФ, **6**, 597, 1967.
[3] В.Н. Лисицын, В.П. Чеботаев. ЖЭТФ, **54**, 419, 1968.
[4] А.Н. Ораевский. Молекулярные генераторы. М., Изд. Наука, 1964.
[5] Н.Г. Басов, В.С. Летохов. УФН, **4**, 96, 1968.

Письма в ЖЭТФ, том 9, стр. 689 – 692 *20 июня 1969г.*

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГАЗА СОЛИТОНОВ

Г.М.Заславский

К уравнению Кортевега-де-Вриза

$$v_t + v_x + v v_x + v_{xxx} = 0 \tag{1}$$

приводятся различные задачи, описывающие распространение нелинейных волн в средах с дисперсией [1]. Существующие алгоритмы [2, 3] построения решений (1) практически отказывают в тех случаях, когда начальный профиль $v(x, 0)$ имеет сложный вид и приводит к образованию очень большого числа уединенных волн (солитонов):

$$v = 3a\,\mathrm{sch}^2\,[\sqrt{a}(x - ut)/2], \quad a = u - 1 > 0, \tag{2}$$

где u – скорость волны и в дальнейшем $a \ll 1$. В то же время такая ситуация характерна для турбулентной среды и исследование ее представляет большой интерес. Ниже развивается статистический метод исследования (1), приводящий к возможности использования представления о больцмановском "газе" солитонов.

Гамильтоновский формализм для (1) имеет вид:

$$H\,\frac{1}{2}\int dq\,(1-q^2)\,v(q)\,v(-q) + \frac{1}{6}\int dq_1\,dq_2\,dq_3\,v(q_1)\,v(q_2)\,v(q_3)\,\delta(q_1+q_2+q_3) \tag{3}$$

$$v = \int dq\, e^{iqx}\, v(q); \qquad v(-q) = v^*(q); \qquad \dot{v}(q) = iq\,\frac{\delta H}{\delta v(-q)}.$$

Рассмотрим "газ" из большого числа солитонов, расстояние между которыми в среднем много больше характерной ширины солитонов $a^{-1/2}$. Представим H в виде:

$$H = \sum_i H_i + V \,,$$

$$H_i = \frac{1}{2}\int dq_i \,(1 - q_i^2)\, v_i(q_i) v_i(-q_i) + \frac{1}{6}\int dq_i\, dq_i'\, dq_i''\, v_i(q_i)\, v_i(q_i') v_i(q_i'') \times$$
$$\times\, \delta(q_i + q_i' + q_i'');$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \int dq_i\, dq_j\, (1 + q_i q_j)\, v_i(q_i)\, v_j(q_j)\, \delta(q_i + q_j) +$$
$$+ \frac{1}{6}\sum_{i \neq j \neq k} \int dq_i\, dq_j\, dq_k v_i(q_i)\, v_j(q_j) v_k(q_k)\, \delta(q_i + q_j + q_k)\,. \tag{4}$$

Возмущение V для разреженного газа солитонов связано с перекрытием "хвостов" распределений (2) и поэтому мало. Это позволяет воспользоваться дальше теорией возмущения.

Преобразуем V к виду, в который явно входит зависимость только от разности R между координатами центров солитонов. С помощью (2) имеем: $v(q) = a(q)\exp(iqy)$, где координата центра солитона $y(t) = y_0 + at$. Подстановка в (4) дает:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} V_{ij}(R_{ij}) + \frac{1}{6}\sum_{i \neq j \neq k} V_{ijk}(R_{ij}, R_{ik}) \,,$$

$$V_{ij}(R) = \int dq\, V_{ij}(q)\, e^{iqR}; \qquad R_{ij} = y_i - y_j \,,$$

$$V_{ij}(q) = V_{ij}^*(q) = V_{ij}(-q), \quad V_{ij}(q) = \Gamma_{ij}\, a_i(q)\, a_j^*(q);$$

$$V_{ijk} = \int dq_i\, dq_j\, dq_k\, V_{ijk}(q_i, q_j, q_k) \exp\left[i(q_i y_i + q_j y_j + q_k y_k)\right],$$

$$V_{ijk}(q_i, q_j, q_k) = \Gamma_{ijk}\, a_i(q_i)\, a_j(q_j)\, a_k(q_k)\, \delta(q_i + q_j + q_k) \,, \tag{5}$$

где Γ_{ij}, Γ_{ijk} – факторы, обрезающие взаимодействие при $\sqrt{a}R < 1$. Нетрудно видеть из (5), что

$$V_{ijk} = V_{ijk}(R_{ij}, R_{ik}) = V_{kij}(R_{ki}, R_{kj}) = V_{jki}(R_{jk}, R_{ji})\,.$$

Вводя канонические переменные–действие (I) и фазу (y) с помощью соотношений $dH_i/dI_i = a_i$; $\dot{y}_i = a_i$, запишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(I_1,\ldots; y_1,\ldots; t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial I_i} - \frac{\partial V}{\partial I_i}\frac{\partial f}{\partial y_i} \right). \quad (6)$$

Используя малость правой части в (6) и усредняя по начальным координатам солитонов y_o, приходим к следующему кинетическому уравнению для многочастичной функции распределения $F(I_1, I_2,\ldots; t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \pi \sum_{i\neq j\neq k} \int dq_i\, dq_j dq_k D_{ijk}\, \delta(a_i q_i + a_j q_j - a_k q_k)\,|V_{ijk}(q_i, q_j, q_k)|^2 \cdot \quad (7)$$

$$D_{ijk}\,\delta(q_i + q_j - q_k)\,F, \quad (7)$$

$$D_{ijk} \equiv q_i \frac{\partial}{\partial I_i} + q_j \frac{\partial}{\partial I_j} - q_k \frac{\partial}{\partial I_k}.$$

В уравнение (7) не вошли двухсолитонные взаимодействия, поскольку для них закон сохранения, связанный с появлением δ-функции $\delta(q(a_i - a_j))$ может быть выполнен только для тождественных солитонов. Следовательно, такие процессы имеют малый фазовый объем. Это обстоятельство является спецификой одномерности задачи.

Проинтегрируем теперь (7) по всем действиям, за исключением некоторого фиксированного и расцепим, как обычно, трехсолитонные функции распределения через односолитонные. Это приводит к уравнению для односолитонной функции $\rho(I)$, являющемуся аналогом уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial \rho(I)}{\partial t} = \pi n^2 \int dI' dI'' \int dq\, dq'\, dq''\, q \frac{\partial}{\partial I}\, \delta(qa + q'a' - q''a'') \times$$

$$\times \delta(q + q' - q'')\,|V(q, q', q'')|^2 \left(q\frac{\partial}{\partial I} + q'\frac{\partial}{\partial I'} - q''\frac{\partial}{\partial I''}\right) \rho(I)\,\rho(I')\,\rho(I''), \quad (8)$$

где n – плотность солитонов. Стационарным решением уравнения (8), соответствующим термодинамическому равновесию газа солитонов, является

$$\rho(I) = \rho_o \exp(-H(I)/T_o) \approx \rho_o \exp(-a^{3/2}/T), \quad (9)$$

где ρ_o, T_o, T – константы и связь между H и a получена из соотношений (2), (3)

Полученное решение (9) является примечательным, если обратиться к известным результатам для энергетического спектра одномерных неупорядоченных систем [4, 5] Согласно [2, 3] из начального значения

$v(x, 0)$ образуются солитоны с амплитудами $a_i \sim |E_i|$, где E_i – дискретные собственные значения уравнения Шредингера с потенциалом $-v(x, 0)$. Отсюда (9) приводит к спектру $\rho(E) \sim \exp(-c\, E^{3/2})$, в соответствии с [4, 5]. Еще более интересная связь с неупорядоченными системами возникает, если вспомнить, что эффективный потенциал неупорядоченной системы, в котором образуется состояние с большим отрицательным E, имеет вид солитона (2) [6].

Изложенный выше метод допускает обобщения для условий, приводящих к необходимости рассмотрения газа, в котором роль частицы играет система из нескольких скоррелированных солитонов.

Институт ядерной физики
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
29 апреля 1969г.

Литература

[1] C. Gardner. Annual Rep., Princeton. MATT–Q–24, 329, 1966.
[2] Ю.А. Березин, В.И. Карпман. ЖЭТФ, 51, 1557, 1966.
[3] C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura. Phys. Rev. Lett., 19 1095, 1967.
[4] И.М. Лифшиц. УФН, 83, 617, 1964.
[5] B.I. Halperin. Phys. Rev., 139, 104A, 1965
[6] J. Zittartz, J.S. Langer. Phys. Rev., 148, 741, 1966

Письма в ЖЭТФ, том 9, стр. 692 – 694 *20 июня 1969г*

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 3-х ТЕЛ С ЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Б.Ахматходжаев[1], *В.Б.Беляев*, *Е.Вжеционко*[2]

Как известно, для решения уравнений Фаддеева необходимо знать поведение 2-х частичной T-матрицы вне массовой поверхности. Мы укажем на одну возможность построения такой T-матрицы. Пусть имеем локальный короткодействующий потенциал $V(r)$. ℓ-я гармоника фурье-образа этого потенциала дается выражением:

$$V_\ell(k,k') = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty j_\ell(kr)\, j_\ell(k'r)\, V(r) r^2 dr \qquad (1)$$

[1] ИЯФ АН УЗ ССР, Ташкент.
[2] Институт ядерных исследований, Варшава.