Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 3, стр. 97 – 100 *10 февраля 1985 г.*

О ДВУМЕРНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПЛАЗМЫ С АЗИМУТАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А.Л.Великович, М.А.Либерман, Р.Ф.Шмальц

Рассмотрены двумерные автомодельные решения уравнений магнитной газодинамики для радиального разлета плазмы с азимутальным магнитным полем. Для показателя адиабаты $\gamma = 4/3$ получен явный аналитический вид таких решений.

Автомодельные решения играют важную роль в газодинамике и в различных задачах физики плазмы, как астрофизической, так и лабораторной. До настоящего времени рассматривались в основном задачи, отвечающие высокой симметрии и сводящиеся по существу к одномерным или квазиодномерным задачам (одно из немногих исключений см. в работе [1]). В настоящей работе мы рассматриваем класс задач идеальной магнитной гидродинамики для чисто азимутальной ориентации магнитного поля. К их числу относится, например, задача о разлете от места фокусировки лазерного луча плазмы со спонтанным азимутальным магнитным полем. Различные механизмы генерации такого поля рассматривались в [2–5]. Здесь, очевидно, имеется только азимутальная симметрия, и течение плазмы *существенно двумерное. Мы сформулируем общую постановку автомодельной задачи о* разлете с азимутальным магнитным полем и покажем, что для специального случая, когда показатель адиабаты плазмы $\gamma = 4/3$,ее решение может быть получено в явном аналитическом виде.

Уравнения идеальной магнитной газодинамики, описывающей течение плазмы с показателем адиабаты γ, можно записать в виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\,\mathbf{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T + (\gamma-1)T\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{b}) = 0, \tag{3}$$

$$n\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) + \nabla(nT) + \frac{1}{\beta}\,\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{b}) = 0. \tag{4}$$

Здесь введено обозначение $\beta = \mu_0 p_0/b_0^2$ и использованы стандартные обозначения безразмерных переменных T/T_0, n/n_0, b/b_0 и p/p_0.

Прежде всего рассмотрим возможность представления решения этой задачи в автомодельном виде: $n = N(\xi)/a^k$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}(\xi)/a^l$, $T = \Theta(\xi)a^m$, $\mathbf{v} = \dot{a}\mathbf{V}(\xi)$, где $a = a(t)$ – зависящий только от времени характерный масштаб размерности длины, а $\xi = r/a$ – автомодельная координата. Отделение временно́й переменной t в уравнениях (1) – (4) происходит при условиях а) $2l = k+m$ и б) $\dot{a}^2 \sim a^{-m}$. Из последнего вытекает, что $a(t) \sim t^{2/m+2}$. Два из параметров k, l и m могут быть выбраны произвольно.

Перейдем в (1) – (4) к сферическим координатам (r, θ, φ), учитывая азимутальную симметрию задачи $(\partial/\partial\varphi = 0)$ и отличие от нуля только азимутальной компоненты магнитного поля $B(\xi, \theta)$. Обозначая радиальную и θ-компоненты скорости через $V(\theta, \xi)$ и $U(\theta, \xi)$ соответственно, получим из (1) – (4) :

$$kN + \xi\frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2 NV) - \frac{1}{\xi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(NU\sin\theta) = 0, \tag{5}$$

$$m\Theta + (\xi - V)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} - \frac{U}{\xi}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} - (\gamma - 1)\frac{\Theta}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2 V) - (\gamma - 1)\frac{\Theta}{\xi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(U\sin\theta) = 0, \tag{6}$$

$$lB + \xi\frac{\partial B}{\partial\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi B V) - \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}(BU) = 0, \tag{7}$$

$$N\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}(V - \xi) - \Gamma V + \frac{U}{\xi}\frac{\partial V}{\partial\theta} - \frac{U^2}{\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi}(N\Theta) + \frac{1}{\beta}\frac{B}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}(B\xi) = 0, \tag{8}$$

$$N\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}(V - \xi) - \Gamma U + \frac{U}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{UV}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}(N\Theta) + \frac{1}{\beta}\frac{B}{\xi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(B\sin\theta) = 0. \tag{9}$$

где $\Gamma = + a\ddot{a}/a^2 = - m/2$.

Граничные условия определяются физикой рассматриваемого процесса. В общем случае такая задача может быть решена только численно. Здесь мы укажем некоторые случаи, приводящие к существенному упрощению этой системы. Например, для $l = k - 1$ и $B = N\xi\sin\theta$ уравнения (5) и (7) совпадают. При этом число свободных параметров уменьшается до одного: $m = k - 2$, $a \sim t^{2/k}$. Решения этого типа для плоской геометрии рассматривались в [6]. Другое упрощение может быть получено в случае адиабатического разлета при однородном распределении энтропии; уравнение (6) удовлетворяется при $\Theta \sim N^{\gamma - 1}$ и $m = k(\gamma - 1)$. Еще один важный частный случай – изотермический разлет плазмы ($\gamma = 1$). Не останавливаясь здесь на этом подробно, отметим лишь, что здесь удается отделить угловую зависимость и свести задачу к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Рассмотрим, наконец, решения уравнений (5) – (9), описывающие чисто радиальный разлет плазмы ($U = 0$), при котором радиальная компонента скорости зависит только от ξ. Простейшее решение такого типа отвечает однородной деформации:

$$V(\xi) = \xi.$$

В этом случае уравнения (5) – (7) удовлетворяются тождественно при $k = 3$, $l = 2$ и $\gamma = 4/3$. Условие б) для временно́й зависимости заменяется здесь уравнением $\ddot{a} = \mu a^{-2}$, где $\mu = \mathrm{const}$. Обозначив $P = N\Theta$ и положив $\beta = 1$, из (8) – (9) получим:

$$\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{B}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi B) = -\mu\xi N, \tag{10}$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta} + \frac{B}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(B\sin\theta) = 0. \tag{11}$$

Для временно́й зависимости имеем

$$t = \pm\left[a^{1/2}(a - s)^{1/2} + s\ln\left(a^{1/2} + (s - a)^{1/2}\right)\right], \tag{12}$$

где $s = \mathrm{sgn}\,\mu$, а положительным и отрицательным t отвечает соответственно расширение или сжатие. При $\mu < 0$ имеются также решения с максимальным конечным радиусом

$$t = \pm\left[\arcsin a^{1/2} - a^{1/2}(1 - a)^{1/2}\right]$$

и степенное решение $a \sim |t|^{2/3}$. Можно показать, что при $\mu = 0$ не существует нетривиальных решений (10) и (11).

Для произвольной функции $B(\xi, \theta)$ из (11) имеем:

$$P(\xi, \theta) = P_1(\xi) - \int^{\theta}\left[\frac{B(\xi, \theta')}{\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta'}B(\xi, \theta')\sin\theta'\right]d\theta', \tag{13}$$

а $N(\xi, \theta)$ выражается через B и P с помощью (10). Таким образом, решение дается формулами (10), (12) и (13) с произвольными функциями $B(\xi, \theta)$ и $P_1(\xi)$, определяемыми граничными условиями. Разумеется, $P(\xi, \theta)$ и $N(\xi, \theta)$ должны быть всюду неотрицательны.

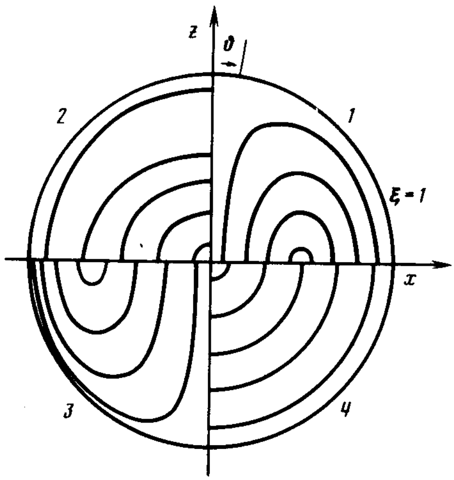
В качестве примера мы выпишем в явном виде простейшее решение, описывающее радиальный разлет плазмы с азимутальным магнитным полем, для которого магнитное поле и давление плазмы обращаются в нуль на ее сферической границе. В этом случае $\mu > 0$, и временная эволюция определяется (12) с $s = 1$, а пространственная зависимость имеет вид

$$B = \xi(1-\xi)\sin\theta,$$

$$N = 6 + (1-\xi)[(8-\sin^2\theta)\xi - 4],$$

$$P = 3(1-\xi^2) + \xi^2(1-\xi)^2(2-\sin^2\theta).$$

На рисунке изображены линии B = const, N = const, линии тока и линии P = const соответственно в секторах *1, 2, 3* и *4*.



Если магнитное поле не обращается в нуль на границе плазмы, то решение должно быть сшито с соответствующим решением линейного волнового уравнения для B в вакуумной области. При этом линии тока проводимости, пересекающие границу плазмы, продолжаются как линии тока смещения. Кинетическое давление также может оставаться конечным на границе плазмы, если последняя представляет собой токовый слой (тангенциальный разрыв).

Отметим, наконец, что при однородной деформации уравнение (3) удовлетворяется произвольной функцией вида $\mathbf{b} = \mathbf{B}(\xi)/a^2(t)$ при $\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0$. Это позволяет при $\gamma = 4/3$ получить автомодельные решения для более сложных конфигураций магнитного поля. В частности, существуют семейства таких решений для расширения (или сжатия) с постоянной скоростью произвольных равновесных плазменных конфигураций, описываемых решениями уравнений Грэда – Шафранова – Шлютера, – токамаков и т. п.

Работа одного из авторов (Р.Ш.) была поддержана Обществом Макса Планка, Немецким обществом естествоиспытателей и Академией наук СССР.

Другие авторы (А.В. и Л.П.) благодарят за поддержку и полезные замечания Я.Б.Зельдовича.

Литература

1. *Garlick A.R.* Astrophysics and Space Science, 1982, **84**, 205.
2. *Аскарьян Г.А., Рабинович М.С., Смирнова А.Д., Студенов В.Б.* Письма в ЖЭТФ, 1967, **5**, 116.
3. *Коробкин В.В., Смирнов Р.В.* Письма в ЖЭТФ, 1966, **4**, 103.

4. *Абдуллаев В.Ш., Алиев Ю.М., Быченков В.Ю.* Письма в ЖЭТФ, 1978, **28**, 524.
5. *Max C.E., Manheimer W.M., Thompson J.J.* Phys. Fluids, 1978, **21**, 128.
6. *Anderson D., Bonnedal M., Lisak M.* Physica Scripta, 1980, **22**, 507.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Институт квантовой оптики
Общества Макса Планка

Гархинг, ФРГ

Поступила в редакцию
5 декабря 1984 г.