

## О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО КОЛЛАПСА

*В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов, С.Л.Мушер*

В рамках трехмерного нелинейного уравнения Шредингера построено квазиклассическое решение коллапсирующего типа, описывающее захват в особенность конечного числа волн. Существование данного режима подтверждается численным экспериментом.

Одной из фундаментальных моделей в физике нелинейных волн является нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

описывающее, в частности, поведение спектрально-узкого волнового пакета в среде с положительной дисперсией ( $\omega''_k > 0$ ) и безынерционной нелинейностью. Свойства решений уравнения (1) существенно зависят от размерности пространства  $d$ . При  $d \geq 2$  уравнение (1) описывает фундаментальное явление волнового коллапса – обращение в отдельных точках пространства амплитуды волнового пакета  $\psi$  в бесконечность. Волновой коллапс происходит за конечное время и с физической точки зрения представляет собой спонтанную концентрацию волновой энергии в небольших областях пространства с последующей ее диссипацией. При  $d = 2$  как волновой коллапс может быть интерпретировано образование точек

ных фокусов при самофокусировке <sup>1</sup>. Заведомо достаточным условием возникновения коллапса является отрицательность при  $t < 0$  гамильтониана уравнения (1)  $H = \frac{1}{2} \int (|\nabla\psi|^2 - |\psi|^4) d\mathbf{r}$  <sup>2, 3</sup>. В ряде случаев (например, в задачах о ленгмюровских волнах в плазме) коллапс может оказаться основным механизмом диссипации волновой энергии.

Для оценки эффективности этого механизма необходимо знать количество волновой энергии, попадающей в зону коллапса. Поэтому вопрос о характере поведения амплитуды  $\psi$  вблизи коллапса имеет принципиальное физическое значение. В настоящей статье мы рассматриваем важный с точки зрения физики плазмы случай  $d = 3$ .

Независимо от  $d$  уравнение (1) допускает автомодельную подстановку ( $\alpha$  — произвольно) <sup>3</sup>

$$\psi = \frac{1}{(t_0 - t)^{1/2 + i\alpha}} \psi_0(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad (2)$$

описывающее при  $t \rightarrow t_0$  формирование в точке  $r = 0$  особенности  $|\psi|^2 \rightarrow c/r^2$ . Только при  $d > 2$  эта особенность интегрируема, и можно надеяться на существование физически разумного решения, описывающего коллапс. Вычисления на ЭВМ показывают, что при  $d = 3$  такое решение существует, если  $\alpha = 0,54$  <sup>1)</sup>. При автомодельном режиме (2) в зону коллапса попадает формально нулевая энергия, и эффективный коэффициент диссипации за счет коллапса пропорционален радиусу  $r_0$ , внутри которого эта диссипация фактически происходит (и где уравнение (1) уже неприменимо). На этом основании автомодельный коллапс в рамках уравнения (1) назван в <sup>3</sup> слабым.

Покажем, что при  $d = 3$  возможен и другой режим коллапса. После замены переменных  $\psi = \sqrt{ne}^{i\phi}$  уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} n_t + \operatorname{div} n \nabla \phi &= 0, \\ \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - n &= \frac{1}{2} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть  $n_0, a_0$  — характерные начальные значения интенсивности и размера волнового пакета — таковы, что выполняются условия квазиклассичности  $n_0 \gg a_0^{-2}$ . В этом случае в уравнениях (3) возможно пренебречь членом  $\Delta \sqrt{n} / \sqrt{n}$ . Полученная система уравнений гидродинамического типа допускает автомодельное решение вида

$$\begin{aligned} n &= a^{-3}(t) f\left(\frac{r}{a(t)}\right), \quad \phi = \lambda^2 \int_0^t \frac{dt}{a^3} + \frac{a_t r^2}{2a}, \\ f(\xi) &= \begin{cases} \lambda^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2}\right), & \xi < \xi_c \\ 0 & \xi > \xi_c \end{cases}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\lambda, \xi_c$  — произвольные константы, а  $a(t)$  подчиняется уравнению Ньютона

$$a_{tt} + \frac{dV}{da} = 0, \quad V(a) = -\frac{1}{6} \frac{\lambda^2}{\xi_c^2} a^{-3}, \quad (5)$$

описывающему падение классической частицы на центр. Если  $a = 0$  при  $t = t_0$ , то при  $t \rightarrow t_0$   $a \sim (t_0 - t)^{2/5}$ , при этом  $n(0, t) \sim (t_0 - t)^{-6/5}$ .

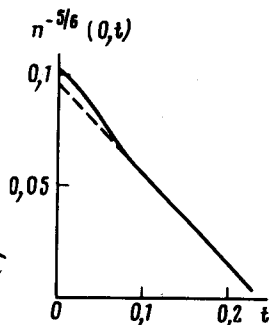
Решение (4), (5) описывает "сильный" коллапс волнового пакета как целого. Если считать, что вся энергия, попавшая в зону коллапса, там поглощается, эффективность колла-

<sup>1)</sup> Этот результат был получен Л.Н.Шуром.

са как механизма диссипации энергии волн не зависит от размеров этой зоны. Описанный режим коллапса можно назвать квазиклассическим.

Поскольку в процессе квазиклассического коллапса  $n \sim 1/a^3$ , условие квазиклассичности  $n \gg 1/a^2$  при  $a \rightarrow 0$  улучшается. Это обстоятельство является в трехмерном пространстве следствием конечности волновой энергии, попадающей в зону коллапса.

Квазиклассическое решение (4), (5) несправедливо в узкой области  $|\xi - \xi_c| = \Delta\xi \ll \xi_c$ . При  $a \rightarrow 0$  ширина этой области  $\Delta\xi$  убывает по закону  $\Delta\xi \sim a^{1/3}(\lambda\xi_c)^{-2/3}$ , что еще раз указывает на улучшение применимости квазиклассического приближения при  $t \rightarrow t_0$ . Более строгая проверка этого факта требует сшивки автомодельного решения (4), (5) с решением линеаризованного уравнения (1) при  $\xi - \xi_c \gg \Delta\xi$ . При этом в зоне  $|\xi - \xi_c| \sim \Delta\xi$  возникает пограничный слой, описываемый трансцендентными функциями Пенлеве (детали этой процедуры мы не приводим ввиду краткости настоящей статьи).



Мы произвели численное решение уравнения (1) в лагранжевых переменных  $\epsilon$ ,  $t$  ( $\epsilon = \int_0^r nr^2 dr$ ) по методике, аналогичной <sup>4</sup>, с начальными условиями, близкими к решению (4)<sup>0</sup>, (5), с  $\Delta\phi = |\phi(\infty) - \phi(0)| \approx 10$ .

Функция  $n(0, t)$  при  $t \rightarrow t_0$  быстро выходит на асимптотику  $n(0, t) = c(t_0 - t)^{-\beta}$ ,  $\beta = \frac{6}{5} \pm 0,03$  (см. рисунок). При этом в зону коллапса захватывается конечное количество энергии, в соответствии с решением (4), (5). Для других начальных данных с  $\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{t=0} = 0$  мы обнаружили, что  $n(0, t)$  с высокой точностью ведет себя как  $(t_0 - t)^{-1}$ . Этот результат согласуется с результатами статьи <sup>5</sup>, и на первый взгляд соответствует автомодельному режиму (2). Однако, даже в этом случае мы наблюдали захват в коллапс конечной энергии, что противоречит представлениям о слабом автомодельном коллапсе (2). Таким образом, вопрос об осуществимости автомодельного решения (2) остается открытым.

#### Литература

1. Прохоров А.М., Луговой В.Н. УФН, 1973, 111, 203.
2. Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И. Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 1970, 12, 1353.
3. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, 1745.
4. Дегтярев Л.М., Крылов В.И. ЖВМ и МФ, 1977, 17, 1523.
5. Буднева О.Б., Захаров В.Е., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, 1, 606.

Институт автоматики и электрометрии  
Академии наук СССР  
Сибирское отделение

Поступила в редакцию  
18 декабря 1984 г.