*Письма в ЖЭТФ, том 9, стр.537-542* *5 мая 1969 г.*

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ ФАЗЫ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В $t$-ПЛОСКОСТИ

*А.Н.Твердохлебов*

Получено следующее, асимптотическое по вещественным $s \to \infty$, свойство фазы амплитуды рассеяния $A(t,s)$: для любого однозначного, быть может разрывного, определения аргумента $\phi(t, s) = \arg\{A(t, s)\}$ в $t$-плоскости при вещественных $s$ максимум $a(s) =$

$= \max\{\phi(t, s)\}$ при $|t| < s$ ограничен снизу

$$a^2(s) \gtrsim \frac{\pi\mu^2}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{tot}(s)}{\sigma_{el}(s)}, \qquad (1)$$

где $\sigma_{tot}(s)$ и $\sigma_{el}(s)$ – соответственно полное сечение и сечение упругого рассеяния частиц массы $\mu$. Так как из имеющихся представлений о поведении полного и упругого сечений $\mu^2 \sigma^2_{tot}(s)/\sigma_{el}(s) \to \infty$, это свойство означает бесконечные осцилляции амплитуды асимптотически по $s \to \infty$. Предполагаются следующие аналитические свойства амплитуды $A(t, s)$: 1) $A(t,s)$ – аналитическая функция по $t$ при любом $s$ вне вещественных разрезов в $t$-плоскости $(4\mu^2, +\infty)$ и $(-\infty, -s)$; 2) модуль $|A(t, s)|$ растет медленнее любой экспоненты по $t$; 3) $a(s) = o(s)$ при $s \to \infty$.

Неравенство (1) будет получено следующим образом. Амплитуду $A(t, s)$ представляем в виде

$$A(t,s) = P_N(t, s)\frac{A(t, s)}{P_N(t, s)} = P_N(t, s)\exp\{\ln \frac{A(t, s)}{P_N(t, s)}\},$$

$P_N(t, s)$ – многочлен по $t$ с корнями $t_k(s)$, совпадающими с нулями $A(t,s)$ в круге $|t| < s$, т.е.

$$P_N(t, s) = \prod_{k=1}^{N} (1 - t/t_k(s)).$$

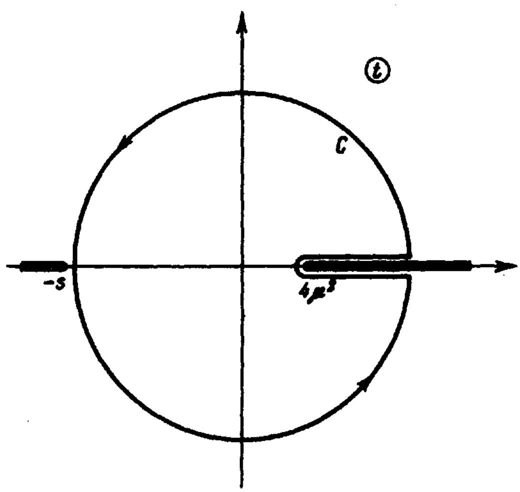
Функция $\ln\{A(t, s)/P_N(t, s)\}$ будет аналитической в круге $|t| < s$ с разрезом и для нее можно будет написать дисперсионное соотношение. При этом интеграл по окружности будет стремиться к нулю при $s \to \infty$ и модуль амплитуды $|A(t, s)|$ будет выражаться при физических значениях $t$ в $s$-канале через модуль многочлена $P_N(t, s)$ и интеграл от функции $\phi(t, s) = \arg\{A(t, s)\}$ по разрезам. Затем из ограниченности фазы $(\phi(t, s) < a(s))$ будет получена нижняя граница для $\sigma_{el}(s)$ при произвольном многочлене $P_N(t,s)$.

Пусть $t_k(s)$ – нули $A(t, s)$, $N = N(s)$ – число нулей в круге $|t| < s$, $P_N(t, s) = \prod_{k=1}^{N}(1 - t/t_k(s))$ – многочлен по $t$. Напишем интеграл Коши для функции $1/t \ln\{A(t, s)/P_N(t,s)\}$ – аналитической в круге $|t| < s$ с разрезом $(4\mu^2, s)$. (Контур интегрирования $C$ см. на рис.1.)

$$\frac{1}{t}\ln\left\{\frac{A(t,s)}{P_N(t,s)}\right\} = \frac{1}{t}\ln\left\{\frac{A(0,s)}{P_N(0,s)}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\ln\{A(\zeta,s)/P_N(\zeta,s)\}}{\zeta(\zeta-t)}\,d\zeta\,.$$

В силу предположений 2) и 3) интеграл по окружности $|\zeta| = s$ будет $o(s)$ при $s\to\infty$; при этом необходимо учесть, что $\arg\{P_N(\zeta,s)\}\leqslant \leqslant 2a(s) = o(s)$, так как число нулей амплитуды и, соответственно,




многочлена не превышает $a(s)/\pi$ по принципу аргумента. Таким образом, учитывая, что $P_N(\zeta,s)$ – аналитична на разрезе получим

$$\ln\left\{\frac{A(t,s)}{A(0,s)P_N(t,s)}\right\} \simeq \frac{t}{2\pi i}\int_{4\mu^2}^{s}\frac{\ln|A(\xi+i\epsilon,s)/A(\xi-i\epsilon,s)|\,d\xi}{\xi(\xi-t)} +$$

$$+\frac{t}{2\pi}\int_{4\mu^2}^{s}\frac{\arg\{A(\xi+i\epsilon,s)\}-\arg\{A(\xi-i\epsilon,s)\}}{\xi(\xi-t)}\,d\xi$$

(использовано $P_N(0,s) = 1$).

Для физических значений $t$ ($\mathrm{Im}\,t = 0$, $-s < \mathrm{Re}\,t < 0$) получим представление модуля амплитуды $|A(t,s)|$ через интеграл от ее аргумента

$$|A(t,s)| = |A(0,s)|\,|P_N(t,s)|\exp\{\mathrm{Re}[\ln \frac{A(t,s)}{A(0,s)P_N(t,s)}]\} =$$

$$= |A(0,s)|\,|P_N(t,s)|\exp\{\frac{t}{2\pi}\int_{4\mu^2}^{s}\frac{\arg\{A(\xi+i\epsilon,s)\}-\arg\{A(\xi-i\epsilon,s)\}}{\xi(\xi-t)}d\xi +$$

$$+ o(s)\}. \qquad (2)$$

Выпишем выражение для упругого и полного сечений через амплитуду:

$$\sigma_{e\ell}(s) = \frac{1}{16\pi s(s-4\mu^2)}\int_{-(s-4\mu^2)}^{0}|A(t,s)|^2 dt, \qquad (3)$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{\mathrm{Im}\{A(0,s)\}}{\sqrt{s(s-4\mu^2)}} \simeq \frac{\mathrm{Im}\{A(0,s)\}}{s}, \qquad (4)$$

$$\sigma_{e\ell}(s) \gtrsim \frac{1}{16\pi}\sigma_{tot}^2(s)\int_{-(s-4\mu^2)}^{0}\left|\frac{A(t,s)}{A(0,s)}\right|^2 dt. \qquad (5)$$

Из (2), учитывая $t<0$, получим

$$\left|\frac{A(t,s)}{A(0,s)}\right|^2 \geqslant |P_N(t,s)|^2\exp\{\frac{2a(s)t}{\pi}\int_{4\mu^2}^{s}\frac{d\xi}{\xi(\xi-t)}\} \simeq$$

$$\simeq |P_N(t,s)|^2\exp\{\frac{2a(s)}{\pi}\ln\frac{4\mu^2}{4\mu^2-t}\} \geqslant |P_N(t,s)|^2\exp\{\frac{2a(s)}{\pi}\frac{t}{4\mu^2}\}. \qquad (6)$$

Обозначим $t=-4\mu^2 x$, $t_K(s) = -4\mu^2 x_K(s)$, $K = 2a(s)/\pi$,

$$|P_N(x)|^2 \equiv |P_N(-4\mu^2 x, s)|^2.$$

Тогда подставляя (6) в (5) получим

$$\sigma_{e\ell}(s) \gtrsim \frac{\mu^2}{4\pi}\sigma_{tot}^2(s)\int_0^{(s/4\mu^2)-1}|P_N(x)|^2 e^{-Kx}dx \simeq \frac{\mu^2}{4\pi}\sigma_{tot}^2(s)\times$$

$$\times[\int_0^{\infty}|P_N(x)|^2 e^{-Kx}dx + 0(e^{-Ks/4\mu^2})].$$

Интеграл $I(s) \equiv \int\limits_0^\infty |P_N(x)|^2 e^{-Kx} dx$ ограничен снизу, так как $|P_N(x)|^2$ – положительно определенный многочлен степени $2N$, так что $P_N(0) = 1$. Пусть

$$|P_N(x)|^2 = \sum_{m,n=0}^{N} a_n a_m x^n x^m, \quad a_0 = 1.$$

Для получения $\min\{I(s)\}$ по произвольным $a_n$ можно считать все нули $x_K$ – действительными и, следовательно, коэффициенты $a_n$ – тоже действительными: $a_n^* = a_n$.

Если вычислить интеграл $I(s)$ в явном виде через коэффициенты $a_n$, то условия на $\min I(s)$ представляют собой систему $N$ линейных уравнений относительно $a_n$:

$$\frac{\partial I(s)}{\partial a_n} = 0, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Учитывая эти уравнения в выражении для $I(s)$, мы выразим

$$b \equiv \min I(s)$$

линейно через $a_n$. Таким образом получается система $N + 1$ линейных уравнений относительно $N + 1$ неизвестных $a_n$, $b$. Решая эту систему относительно $b$, получим:

$$b = \frac{1}{K(N+1)}$$

и, следовательно,

$$I(s) \geqslant \frac{1}{K(N+1)} \simeq \frac{\pi}{2a(s)} \frac{\pi}{(a(s) + \pi)},$$

так как $N$ по принципу аргумента не превышает $a(s)/\pi$ (см. выше). Следовательно

$$\sigma_{el}(s) \gtrsim \frac{\mu^2 \pi}{8} \frac{\sigma^2_{tot}(s)}{a(s)[a(s) + \pi]},$$

или

$$a(s)[a(s) + \pi] \gtrsim \frac{\pi}{8} \mu^2 \frac{\sigma^2_{tot}(s)}{\sigma_{el}(s)}.$$

Если предположить, что

$$\frac{\mu^2\,\sigma_{tot}^2(s)}{\sigma_{el}(s)} \to \infty \text{ при } s \to \infty$$

то $\alpha(s) \to \infty$ и для нижней асимптотической оценки максимума $\alpha(s)$ аргумента амплитуды $A(t,s)$ в $t$-плоскости получим неравенство (1).

Всесоюзный институт
научной и технической информации
Академии наук СССР
Отделение физики

Поступила в редакцию
24 марта 1969 г.

---

*Письма в ЖЭТФ, том 9, стр.542-544* *5 мая 1969 г.*

## ( 21 ЭФФЕКТ "САМОПРОЗРАЧНОСТИ" В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

*И.А.Полуэктов, Ю.М.Попов*

В работах [1,2] теоретически предсказан и экспериментально обнаружен эффект "индуцированного" просветления среды, состоящей из двухуровневых молекул в основном состоянии, при прохождении через нее мощного ультракороткого импульса когерентного света. Это просветление не связано с обычным эффектом насыщения и возникает в том случае, когда длительность импульса света $\tau << T_2$, где $T_2$ – время релаксации поляризации среды, а также

$$\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} F\,dt > \pi,$$

где $F$ – амплитуда поля светового импульса, $\mu$ – дипольный матричный элемент перехода. Физически эффект заключается в том, что импульс света, когерентно возбуждая молекулы, теряет на переднем фронте энергию, которая затем возвращается к нему на заднем фронте в результате переизлучения молекул. Представляет большой интерес ис-