Письма в ЖЭТФ, том 11, стр. 203 – 206 *5 февраля 1970 г.*

О СТРУКТУРЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

М.Д.Миллионщиков

В работе [1] предложено уравнение изотропной турбулентности, содержащее турбулентную вязкость. Введением турбулентной вязкости, различные гипотезы замыкания системы уравнений изотропной турбулентности заменяются теми или иными гипотезами о структуре коэффициента турбулентной вязкости. В этой работе мы рассматриваем следующую гипотезу о структуре коэффициента вязкости для изотропной турбулентности:

$$\nu_{\text{т}} = k\left(\frac{r^2}{t}\right). \qquad (1)$$

При этом величина k вообще говоря может зависеть от числа Рейнольдса турбулентности. Эта гипотеза имеет ряд теоретических преимуществ по сравнению с формулой, предложенной в [1]:

$$\nu_{\text{т}} = k\,[B_d^d(0,t)]^{1/2} r, \qquad (2)$$

в частности, обеспечивая требуемое поведение B_d^{dd} при $r \to 0$. Значение коэффициента k в формуле (1) может изменяться в более широких пределах, чем в формуле (2). В этом случае основное уравнение изотропной турбулентности записывается в виде:

$$\frac{\partial B_d^d}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r} r^4 \left(2\nu + 2k\frac{r^2}{t}\right)\frac{\partial B_d^d}{\partial r}, \qquad (3)$$

что эквивалентно гипотезе о записи третьих моментов в виде

$$B_d^{dd} = 2k \frac{r^2}{t} \frac{\partial}{\partial r} B_d^d . \qquad (4)$$

Прежде всего заметим, что формула (4), основанная на использовании гипотезы (1), обеспечивает выполнение всех требований к функции B_d^{dd}, вытекающих из ее определения. Таким образом, эта гипотеза не только дает структуру коэффициента вязкости, но и обеспечивает рассмотрение уравнения (3) как первого уравнения бесконечной системы уравнений для корреляционных функций. Уравнение (3) имеет автомодельное решение вида

$$B_d^d(r, t) = t^n\, v(\eta), \quad \text{где} \quad \eta = r t^{\beta}, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

При $n = 5\beta$ уравнение для $v(\eta)$ интегрируется в конечном виде:

$$v(\eta) = \frac{c}{(1 + k\eta^2/\nu)^{1/8k}}.$$

Интегральный инвариант изотропной турбулентности

$$\int_0^\infty B_d^d(r, t)\, r^4 dr = \text{const}$$

для $n = 5\beta$ конечен при $k < 1/20$.

В этом случае при $\beta = -1/2$ имеем $n = -5/2$ и, следовательно,

$$B_d^d = \frac{c}{t^{5/2}} \frac{1}{(1 + k\eta/\nu)^{1/8k}}.$$

Предельный переход в этой формуле при $k \to 0$ дает известную формулу, полученную в [2], справедливую для случая, когда действует лишь молекулярная вязкость:

$$B_d^d = \frac{c}{t^{5/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right).$$

В случае, когда молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной вязкостью, уравнение (3), принимающее вид

$$\frac{\partial B_d^d}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(2k\frac{r^6}{t}\frac{\partial}{\partial r}B_d^d\right)$$

имеет автомодельное решение вида

$$B_d^d(r, t) = t^n u(\eta), \quad \eta = rt^{\beta}$$

с произвольным показателем β.

Отсюда вытекает, что в случае, когда действует оба вида вязкости молекулярная и турбулентная, причем влияние турбулентной вязкости преобладающее, имеет смысл искать приближенное решение уравнения (3) с произвольным показателем β. Точное уравнение (3) при этом заменяется приближенным для "квазиавтомодельного" режима. В этом уравнении член, содержащий молекулярную вязкость, будет иметь временной множитель $t^{2\beta+1}$, который можно заменить его средним значением $s = \overline{t^{2\beta+1}}$ на данном интервале изменения t.

Приближенное уравнение для "квазиавтомодельного" режима приобретает вид (для $n = 5\beta$)

$$\beta\frac{d}{d\eta}(\eta^5 u) = \frac{1}{\eta^4}\frac{d}{d\eta}\eta^4[2\nu s + 2k\eta^2]\frac{du}{d\eta}.$$

Его решение

$$u = c(a^2 + \eta^2)^{\beta/4k} \quad и \quad B_d^d(r, t) = ct^{5\beta}(a^2 + \eta^2)^{\beta/4k},$$

где $a^2 = \nu s/k$. Это решение справедливо при условии $\beta/2k < -5$.

При этом, в соответствии с формулой (4) выражение для третьих моментов приобретает вид

$$B_d^{dd}(r, t) = \beta\frac{\eta^3}{a^2 + \eta^2}B_d^d(r,t)\,t^{-(1+\beta)}.$$

Для нормированной функции B_d^{dd} имеем

$$\frac{B_d^{dd}(r,t)}{[B_d^d(0, t)]^{3/2}} = \frac{\beta}{\sqrt{c}}\frac{\eta^3}{a^2 + \eta^2}\frac{B_d^d(r, t)}{B_d^d(0, t)}t^{-(1+\frac{7}{2}\beta)}. \qquad (5)$$

Случай $\beta = -1/2$, $(s = 1)$ соответствует точному решению уравнения (3). Это решение при произвольном показателе β позволяет лучше описать экспериментальные данные, характеризующиеся значительной неавтомодельностью по параметру $\eta_1 = r/\sqrt{\nu t}$. При этом, если $\beta \neq -2/7$ изменение минимума выражения (5) в зависимости от времени обеспечивается без дополнительного предположения о зависимости k от времени.

Предварительные данные по решению уравнения (3) на ЭВМ показали, что с помощью "квазиавтомодельного" решения можно получить достаточно точные результаты.

Поступила в редакцию
31 декабря 1969 г.

Литература

[1] М.Д.Миллионщиков. Изотропная турбулентность в поле турбулентной вязкости. Письма в ЖЭТФ, 10, 406, 1969.

[2] М.Д.Миллионщиков. Вырождение однородной изотропной турбулентности. ДАН СССР, 22, 236, 1939.