Письма в ЖЭТФ, том 11, стр. 254 – 256 *5 марта 1970 г.*

ОБ УРОВНЯХ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНА ПРИ $Z > 137$

В.С.Попов

Как известно, решение уравнения Дирака в поле точечного заряда Ze является математически корректным лишь при $Z < 137$. Энергия нижнего уровня дискретного спектра ($n = 1, j = 1/2$) равна

$$\epsilon_0 = \sqrt{1 - a^2} \qquad (a = Ze^2 = Z/137, \qquad \hbar = c = m = 1). \qquad (1)$$

При $a = 1$ ϵ_0 доходит до нуля, и продолжение формулы (1) на область $a > 1$ приводит к мнимым значениям ϵ_0. Поэтому при $a > 1$ следует учесть конечные размеры ядра. Такая постановка вопроса принадлежит Померанчуку и Смородинскому, в работе которых [1] дано правильное (с качественной стороны) описание явлений при $Z > 137$: с ростом a уровни продолжают опускаться пока при некотором "критическом" значении $a_{кр} > 1$ уровень $1S_{1/2}$ не дойдет до границы нижнего континуума $\epsilon = -1$. Однако при получении уравнения для $a_{кр}$ в [1] допущена ошибка [1], вследствие которой приведенные там значения $Z_{кр} = 137\, a_{кр}$ являются завышенными. Заряд $Z_{кр}$ определяет "электродинамическую границу" периодической системы элементов Менделеева. В последнее время, в связи с успехами в синтезе сверхтяжелых ядер, вопрос о максимально-возможном Z приобрел дополнительную актуальность [2].

Для нахождения $a_{кр}$ достаточно решить уравнение Дирака при $\epsilon = -1$ в потенциале

$$V(r) = \begin{cases} -a/r, & \text{при} \quad r > R \\ -\dfrac{a}{R} f\left(\dfrac{r}{R}\right), & \text{при} \quad 0 < r < R \end{cases} . \qquad (2)$$

Вид обрезающей функции $f(x)$ зависит от распределения электрического заряда по объему ядра. Так, $f(x) = \frac{1}{2}(3 - x^2)$ отвечает постоянной плотности, а $f(x) \equiv 1$ – концентрации всего заряда на поверхности ядра. Можно показать, что при $r > R$ решение имеет вид:

$$r g(r) = K_{i\nu}(\sqrt{8ar}), \qquad f(r) = a^{-1} r g'(r) \qquad (3)$$

(для уровня $1S_{1/2}$). Здесь $\nu = 2\sqrt{a^2 - 1}$, $K_{i\nu}$ – функция Макдональда с мнимым индексом (для нее имеются таблицы [3]), а g и f – радиальные функции для верхней и нижней компоненты дираковского биспинора. Во внутренней области $r < R$ используем малость R по сравнению с комптоновской длиной волны электрона. Удобно перейти к функции $\xi = rg/(rg)'$, удовлетворяющей уравнению $(x = r/R)$:

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 + a^2 f^2 \xi^2 + \frac{f'}{xf}\, \xi(\xi - x); \qquad \xi(0) = 0 . \qquad (4)$$

---

[1] Не учтено условие отсутствия узлов у волновой функции основного состояния.

Сшивание двух решений при $r = R$ дает уравнение для определения $a_{кр}$:

$$zK'_{i\nu}(z) - 2\lambda K_{i\nu}(z) = 0 \ , \qquad (5)$$

где $z = \sqrt{8aR}$: $\lambda = [\,\xi(1)]^{-1}$. Для нахождения $\lambda = \lambda(a)$ нужно предварительно решить уравнение (4), что может быть сделано численными методами. В простейшем случае $f(x) \equiv 1$ это решение находится аналитически: $\xi(x) = tg\, ax/a$, $\lambda = a\,ctg\, a$. Значения $a_{кр}$, полученные из (5), приводятся в таблице для двух моделей обрезания: заряд на поверхности ядра (столбец I) и равномерное распределение заряда по объему ядра (столбец II). В столбце III для сравнения приведены значения $a_{кр}$, указанные в работе [1] (заметим, что там рассматривалась лишь модель I с $f(x) \equiv 1$).

$R \cdot 10^{12}$ *см*	$a_{кр}$		
	I	II	III
0,8	1,248	1,224	1,28
1,0	1,271	1,243	–
1,2	1,291	1,260	1,46

Если экстраполировать на область $Z > 137$ зависимость $R = r_0 A^{1/3}$, полагая (как и для тяжелых ядер) $r_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-13}$ *см* и $A = 2{,}5\,Z$, то критический заряд ядра получается равным $Z_{кр} = 168$ (в модели II; при этом $R_{кр} = 8{,}25$ ф). Это значение $Z_{кр}$ мало чувствительно к деталям распределения заряда по ядру. Так, если использовать модель I, то получится $Z_{кр} = 171$.

Возникает вопрос, что будет при $Z > Z_{кр}$? Можно представить себе мысленный опыт, в котором при слиянии двух голых докритических ядер с зарядом $Z/2 < Z_{кр}$ возникает сверхтяжелое ядро с зарядом Z больше критического (как указано в работе [4], по существу та же ситуация возникает и при сближении таких ядер на расстояние $\lesssim 1$). В соответствии с [4] при $a > a_{кр}$ начинается спонтанное рождение пар кулоновским полем, однако детали этого процесса выглядят не так, как это предполагалось в [4]. Прежде всего обратим внимание на то, что состояние электрона, лежащее на краю нижнего континуума, является локализованным (в отличие от $\epsilon = +1$). Действительно, из (3) имеем: $g, f \sim e^{-\sqrt{8ar}}$ при $r \to \infty$. Это свойство характерно для релятивистской кулоновской задачи и не зависит от спина. Для понимания его происхождения рассмотрим уравнение Клейна – Гордона, которое математически эквивалентно нерелятивистскому уравнению Шредингера с эффективной энергией $E = \dfrac{1}{2}(\epsilon^2 - 1)$ и потенциалом $U = \epsilon V - \dfrac{1}{2} V^2$. При $V = -a/r$ "хвост" потенциала U имеет вид: $U \sim -\epsilon a/r$, т. е. знак его зависит от знака энергии ϵ. Отсюда следует асимптотика волновой функции при $r \to \infty$:

$$\chi(r) \sim e^{-\chi \cdot r} r^n \qquad (\chi = \sqrt{1-\epsilon^2}\,, \quad n = \epsilon a/\chi) \ . \qquad (6)$$

При $\epsilon \to +1$, $n \to +\infty$ и происходит делокализация электрона, а при $\epsilon \to -1$ предэкспонента убывает быстрее любой степени r, что согласуется с (3). При увеличении a сверх $a_{кр}$ связанное состояние (3) превращается в квазистационарное состояние, имеющее на бесконечности асимптотику типа расходящейся волны. Его энергия становится комплексной, и ее мнимая часть определяет вероятность w рождения пар в единицу времени. Приведем выражение для w в предельном случае очень малых R:

$$w = \frac{6\pi}{5} \exp\left\{-\sqrt{\frac{5\pi}{3}\frac{\nu_{кр}^2}{\nu - \nu_{кр}}}\right\} \quad (\nu = 2\sqrt{a^2 - 1}). \qquad (7)$$

Эта формула справедлива лишь при $\nu_{кр} << 1$, что для реальных значений R не выполняется. Однако и более точная формула для w, полученная без предложения о малости ν, с качественной стороны весьма похожа на (7). Вблизи $a = a_{кр}$ (порог рождения пары) вероятность w экспоненциально мала: $w \sim \exp\left\{-\sqrt{\frac{a}{a - a_{кр}}}\right\}$. Подчеркнем, что экспоненциальное зануление w на пороге является чисто кулоновским эффектом: статическое поле рождает пары лишь в области, где $|V(r)| > 2$, а затем позитроны проходят через кулоновский барьер $U(r) = \frac{a}{r} - \left(\frac{a^2}{2r^2}\right)$, проницаемость которого при $\epsilon \to -1$ экспоненциально мала. Эта малость отсутствует при рождении пар полем с конечным радиусом действия. Так например, для прямоугольной ямы с радиусом r_o и глубиной V находим: $V_{кр} = \sqrt{1 + \pi^2 r_o^{-2}}$ и $w \sim (V - V_{кр})^{3/2}$ при $V \to V_{кр}$.

Автор глубоко благодарен А.М. Переломову и М.В.Терентьеву за многочисленные обсуждения в ходе работы, а также С.С.Герштейну, Я.Б.Зельдовичу, Б.Л.Иоффе, Л.Б.Окуню и В.В.Судакову за обсуждение результатов и ряд ценных замечаний.

Институт теоретической
и экспериментальной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 января 1970 г.

Литература

[1] И.Померанчук, Я.Смородинский. J. of Phys. USSR, 9, 97, 1945.

[2] Г.Н.Флеров. УФН 95, 25, 1968; препринт ОИЯИ Р15-4315, 1969.

[3] М.И.Журина, Л.Н.Кармазина. Таблицы модифицированных функций Бесселя с мнимым индексом. Изд. ВЦ АН СССР, М. 1967.

[4] С.С.Герштейн, Я.Б.Зельдович. ЖЭТФ, 57, 654, 1969.