Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 4, стр. 165 – 168 *25 февраля 1985 г.*

ТВИСТОРЫ И ИНСТАНТОНЫ В ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

А.М.Семихатов

Предложены семи- и восьмимерные "октонионные" обобщения твисторной конструкции Пенроуза. Указаны их связи с соответствующими уравнениями дуальности и октонионным обобщением конструкции ADHM.

Современные теории Калуцы – Клейна вызывают интерес к решениям классических уравнений в размерности > 4 и среди них, в частности, к аналогам четырехмерных уравнений дуальности [1–4]. Так, в пространстве $4k$ измерений найдено [4] обобщение конструкции ADHM [5] для подобных уравнений [2], нарушающих $SO(4k)$ до $\mathrm{Sp}(1)\times \mathrm{Sp}(k)/Z_2$. Однако в размерности 8 (и 7) существует еще "исключительная", в смысле связи с алгеброй октонионов, Spin(7)- (соответственно G_2-) ковариантная дуальность. Она широко использовалась в супергравитационном контексте [6], в то время как соответствующие уравнения для поля Янга – Миллса решены пока лишь в рамках простейшего анзаца [3]. Уместно вспомнить, что в четырехмерном случае успех в изучении уравнений дуальности (и родственных им) [5] принесло применение твисторного расслоения

$$\mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^3 \to S^4 \tag{1}$$

трехмерного комплексного проективного пространства $\mathbf{CP}^3$ над 4-сферой S^4 со слоем $\mathbf{CP}^1$. В настоящей работе показано, каким образом использование октонионов позволяет построить адекватные восьмимерной дуальности "усеченные" (Spin(7)-, но не Spin(8)-ковариантные!) твисторы, и, видимо, октонионное обобщение конструкции ADHM.

1. Начнем с построения в октонионных терминах твисторного расслоения[1)]

$$Q_6 \to T_{10} \to S^8 \tag{2}$$

комплексного проективного многообразия T_{10} над S^8 с шестимерной комплексной квадрикой Q_6 в слое. Формальной модификацией используемого здесь приема мы получим затем усеченные твисторы.

Отождествим $\mathbf{R}^8$ с алгеброй октонионов [7] $\mathbf{O}$, а ее в свою очередь будем считать вложенной в $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{O}$ – альтернативную алгебру [7] с делителями нуля, в которой мы выберем базис [8], записываемый в виде столбца f:

$$f^t \equiv (E_\mu, \overline{E}^\mu) \equiv (E_A),\ \mu = 0, \dots, 3, \quad A = 0, \dots, 7 \tag{3}$$

и имеющий таблицу умножения, приведенную в таблице. Точке $x \in \mathbf{R}^8$ с координатами $(x_M) = (x_0, x_a, x_{a+3}, x_7)$, $a = 1, 2, 3$, $M = 0, \dots, 7$, соответствует элемент из $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{O}$ вида $x = (x^\mu, \overline{x}_\mu)f \equiv x^A E_A$, $A = 0, \dots, 7, \mu = 0, \dots, 3$, где

$$x^0 = x_0 + i x_7, \quad x^a = x_a + i x_{a+3}, \quad \overline{x}_\mu = \overline{x^\mu}, \tag{4}$$

и черта означает *комплексное* сопряжение (здесь $i \in \mathbf{C} \not\subset \mathbf{O}$!).

Пусть $\xi, \eta \in \mathbf{C}\otimes\mathbf{O}$, причем $\eta = x\xi$. Идея твисторного подхода состоит в том, чтобы восстановить $x \in \mathbf{O}$ по заданным ξ и η. Это можно сделать, однако, тогда и только тогда, когда ξ и η удовлетворяют ряду соотношений. Распространяя скалярное произведение $<,>$ [7] с $\mathbf{O}$ на $\mathbf{C}\otimes\mathbf{O}$ по C-линейности, потребуем, прежде всего, $<\xi, \xi> = 0$. Тем самым ξ определяет (в однородных координатах) точку на шестимерной комплексной квадрике $\tilde{Q}_6^\# \subset \mathbf{CP}^7 = \mathbf{P}(\mathbf{C}\otimes\mathbf{O})$. Полагая, при заданном $x \in \mathbf{O}$, $\eta = x\xi$, будем иметь тогда ($*$ обозначает *октонионное* сопряжение [7], не затрагивающее $i \in \mathbf{C}$):

$$\eta\xi^* = 0, \quad <\eta, \eta> = 0, \quad <\xi, \xi> = 0. \tag{5}$$

---

1) Его рассматривал М.Атья.

Таким образом, η определяет точку некоторой другой квадрики $Q^{\#}_6$.

Принцип тройственности [7] для группы $SO(8)$ утверждает, что для всякого $\omega \in so(8)$ существуют и единственны $\bar{\omega}^{\#}$ и $\omega^{\#} \in so(8)$, удовлетворяющие соотношению

$$\omega^{\#}(xy) = (\omega x) y + x(\bar{\omega}^{\#} y), \quad x, y \in \mathbf{O}, \tag{6}$$

и что, более того, $\omega \to \bar{\omega}^{\#}$ и $\omega \to \omega^{\#}$ являются (спинорными) представлениями алгебры Ли $so(8)$. Тем самым $so(8)$-инвариантность условий (5) обеспечена, коль скоро ξ и η преобразуются по представлениям, указанным в обозначениях соответствующих квадрик. (Строго говоря, подразумевается продолжение представлений по $\mathbf{C}$-линейности с $\mathbf{O}$ на $\mathbf{C} \otimes \mathbf{O}$).

Среди соотношений (5) пять независимых; они и определяют комплексное *многообразие твисторов* $T_{10} \subset \mathbf{CP}^{15}$. Если (в однородных координатах) $(\eta, \xi) \in T_{10}$ и $\xi \neq 0$, то однозначно определяется $x \in \mathbf{O}$ такой, что $\eta = x\xi$; при этом $\bar{Q}^{\#}_6$ оказывается в слое над x. Бесконечно удаленная точка и слой над ней – это $(Q^{\#}_6, \xi = 0)$. Таким образом установлено (2).

Соотношение $\eta\xi^* = 0$ может быть интерпретировано в терминах *тройственности на комплексных квадриках* [9], согласно которой между тремя шестимерными квадриками имеется набор соответствий типа (точка) $\leftrightarrow$ (3-пространство) $\leftrightarrow$ (3-пространство). (На квадрике размерности 6 имеются две, α- и β-, системы линейных подпространств размерности 3. При $\xi \in \bar{Q}^{\#}_6$ те $\eta \in Q^{\#}_6$, для которых $\eta\xi^* = 0$, определяют в однородных координатах такое 3-пространство).

	E_0	E_b	$\bar{E}^0$	$\bar{E}^b$
E_0	E_0	E_b	0	0
E_a	0	$\epsilon_{abc}\bar{E}^c$	E_a	$-\delta^b_a E_0$
$\bar{E}^0$	0	0	$\bar{E}^0$	$\bar{E}^b$
$\bar{E}^a$	$\bar{E}^a$	$-\delta^a_b \bar{E}^0$	0	$\epsilon^{abc}E_c$

2. *Многообразие* T_9 *усеченных твисторов* определяется теми же соотношениями (5), но с $\xi \in \mathbf{C} \otimes \mathbf{O}'$, где $\mathbf{O}' = \{ x \in \mathbf{O} \mid x^* = -x \}$ – подпространство чисто мнимых октонионов. Выбирая в $\mathbf{C} \otimes \mathbf{O}'$ базис $h^t = (E_a, \bar{E}^a, \bar{E}^0 - E_0)$ и полагая $\xi = (z^a, y_a, w)h$, $\eta = x\xi = (v^\mu, u_\mu)f$, находим, вычисляя на основе таблицы, матрицу X, представляющую оператор L_x левого умножения на x, $L_x : \mathbf{C} \otimes \mathbf{O}' \to \mathbf{C} \otimes \mathbf{O}$:

$$(v, u)f = (z, y, w)Xf, \tag{7}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x^0 \mathbf{1} & -\bar{\mathbf{x}} & -[x] \\ -\mathbf{x} & -[\bar{x}] & 0 & \bar{x}_0 \mathbf{1} \\ -x^0 & \mathbf{x}^t & \bar{x}_0 & -\mathbf{x}^+ \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $[x]$ означает 3×3 матрицу $[x]_{ab} = \epsilon_{acb} x^c$, $\mathbf{1}$ – единичную 3×3 матрицу и $\mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{x}}^t$. Более подробно соотношения (7) выглядят как

$$\begin{aligned} v^0 &= -wx^0 - y_a x^a, \quad & v^a &= wx^a + z^a x^0 - \epsilon^{abc} y_b \bar{x}_c, \\ u_0 &= w\bar{x}_0 - z^a \bar{x}_a, \quad & u_a &= -w\bar{x}_a + y_a \bar{x}_0 - \epsilon_{abc} z^b x^c, \end{aligned} \tag{9}$$

а соотношения (5) – как

$$\epsilon_{abc} v^b z^c + u_0 y_a - w u_a = 0, \quad \epsilon^{abc} u_b y_c + v^0 z^a + v^a w = 0, \tag{10}$$

$$v^b y_b + v^0 w = z^b u_b - w u_0 = v^\mu u_\mu = z^b y_b - w^2 = 0.$$

$SO(7)$ действует на $\mathbf{O}'$ а Spin(7) – на $\mathbf{O}$. Согласно соответствующему принципу тройственности [7], для $\omega \in so(7)$ однозначно определяется $\omega^b \in \mathrm{spin}(7) \subset so(8)$ так, что для любых $x \in \mathbf{O}$, $a \in \mathbf{O}'$ выполнено

$$\omega^b(xa) = (\omega^b x)a + x(\omega a),$$

и $\omega \to \omega^b$ есть представление. Таким образом, на этот раз ξ, x и η несут соответственно представления ω, ω^b и ω^b алгебры Ли $so(7)$. Аналогично предыдущему, T_9 интерпретируется в терминах тройственности между квадрикой Q_5 и двумя квадриками Q_6^b.

3. Интересующие нас $so(7)$-ковариантные уравнения дуальности имеют вид

$$\frac{1}{2} f_{MNKL} F_{(M)(N)} = \lambda F_{(K)(L)}, \quad M, \ldots = 0, \ldots, 7, \tag{11}$$

где $F_{(M)(N)} = [\nabla_{(M)}, \nabla_{(N)}]$, $\nabla_{(N)}$ – ковариантное дифференцирование, а компоненты полностью антисимметричного тензора f_{MNKL} выражаются через структурные константы алгебры $\mathbf{O}$ [10]. В (11) допустимы значения $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 1$. Полагая

$$(\nabla_A) = (\nabla_\mu, \overline{\nabla}^\mu), \quad \nabla_0 = \nabla_{(0)} - i\nabla_{(7)}, \quad \nabla_a = \nabla_{(a)} - i\nabla_{(a+3)}, \tag{12}$$

и $F_{AB} = [\nabla_A, \nabla_B]$, находим, что при $\lambda = 1$ (11) эквивалентно системе

$$2F_0{}^a = \epsilon^{abc} F_{bc}, \quad F_0^0 = F_n{}^n, \quad 2F^0{}_a = \epsilon_{abc} F^{bc}, \tag{13}$$

а при $\lambda = -3$ – системе

$$\begin{gathered} F_{0a} = F^{0a} = 0, \quad 4F_a{}^b = \delta_a^b (F_n{}^n - F_0{}^0), \\ 2F_0{}^a = -\epsilon^{abc} F_{bc}, \quad 2F^0{}_a = -\epsilon_{abc} F^{bc}. \end{gathered} \tag{14}$$

4. В $\mathbf{R}^8 \approx \mathbf{O}$, где отождествлены векторы и ковекторы, калибровочному полю $A_{(M)}$ соответствует 7×8 матрица, действующая на твисто[р] (см. (7, 8)). В терминах ковариантного дифференцирования мы введем, наряду с (12), матрицу $\widetilde{\nabla} = (\nabla_\alpha{}^A)$, $\alpha = 1, \ldots, 7$; с компонентами, получаемыми из (8) заменой $x^A \to \overline{\nabla}^A \equiv \overline{\nabla_A}$. Пусть $\nabla_\alpha{}^A = \nabla_B\, \mathcal{E}^{BA}_\alpha$. Тогда $\mathcal{E}^{AB}_\alpha = -\mathcal{E}^{BA}_\alpha$. Поднимая и опуская индексы $A, B, \ldots$ и α, β, ... с помощью соответственно матриц P_{AB} и $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$, где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

(так, что например, $\mathcal{E}^{\alpha A}_B = \mathcal{K}^{\alpha\beta} P_{BC}\, \mathcal{E}^{CA}_\beta$), определим

$$N^{AB}_{\alpha\beta} = \mathcal{E}^A_{\alpha C}\, \mathcal{E}^{BC}_\beta - \mathcal{E}^B_{\alpha C}\, \mathcal{E}^{AC}_\beta. \tag{16}$$

Тогда будем иметь следующие тождества:

$$F_{AB} = \mathcal{E}_{AB\beta} F^\beta + N_{AB\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad F^\beta = \frac{1}{4}\mathcal{E}^{\beta AB} F_{AB}, \quad F^{\alpha\beta} = \frac{1}{8} N^{\alpha\beta AB} F_{AB}, \tag{17}$$

$$\mathcal{E}_{\gamma AB} N^{AB}_{\alpha\beta} = 0, \tag{18}$$

причем *условия обращения в нуль* F^α *и* $F^{\alpha\beta}$ *эквивалентны соответственно систем[ам]* (13) *и* (14). Разложение (17) обобщает аналогичное разложение $F_{\mu\nu}$ в $\mathbf{R}^4$ в спинорных координатах на самодуальную и антисамодуальную части. Продолжается ли аналогия до построения конструкции ADHM ? Не видно, каким образом можно удовлетворить в ADHM-духе соотношениям $F^{\alpha\beta} = 0$. (Сходный эффект наблюдался в [4]). Но для уравнений $F^{\alpha} = 0$ наличие условия ортогональности (18) позволяет рассчитывать на построение октонионного аналога ADHM-конструкции исходя из выражения

$$\Delta^{A} = a^{A} + b^{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}^{AB} \bar{x}_{B} , \tag{19}$$

подчиненного определенным квадратичным соотношениям.

5. Бо́льшая часть изложенного выше переносится, с соответствующими модификациями, на случай уравнений дуальности в $\mathbf{R}^7$, нарушающих $SO(7)$ до G_2. Здесь следует начать с матричного представления G_2-ковариантного действия $x \in \mathbf{R}^7 \approx \mathbf{O}'$ коммутатором на $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{O}'$. В расширенном варианте настоящей статьи будут рассмотрены детали этой конструкции, а также геометрическая (в терминах усеченных твисторов и тройственности на квадриках) интерпретация уравнений и описание возникающих из усеченных твисторов нетривиальных компактификаций пространств $\mathbf{R}^8$ и $\mathbf{R}^7$.

После завершения этой работы я узнал о работе [11], которая частично пересекается с данной. Интересно отметить, что рассматриваемое в [11] твисторное расслоение Атьи – Хитчина $\mathbf{CP}^3 \to Q_6 \to S^6$ также имеет чисто октонионную интерпретацию [8]: это расслоение грассманиана ориентированных 2-плоскостей в $\mathbf{O}$ над 6-сферой комплексных структур на $\mathbf{O}$.

Я благодарен В.Я.Файнбергу за внимание к работе и плодотворные обсуждения. Я также признателен О.В.Огиевецкому за указание мне работы [11] и Р.Э.Каллош, познакомившей меня с работой [9].

Литература

1. *Tchrakian D.H.* Preprint DIAS-STP-84-34; *Grossmann B., Kephart T.W., Stasheff J.D.* Preprint PURD-TH-84-4.
2. *Corrigan E., Devchand C., Fairlie D.B., Nuyts J.* Nucl. Phys., 1983, **B214**, 452; *Ward R.S.* Ibid, 1984, **B236**, 381.
3. *Fairlie D.B., Nuyts J.* J. Phys., 1984, **A17**, 2867.
4. *Corrigan E., Goddard P., Kent A.* Preprint DAMTP84/10.
5. *Atiyah M.F., Drinfeld V.G., Hitchin N.J., Manin Yu. I.* Phys. Lett., 1978, **65A**, 185; *Hitchin N.J.* Comm. Math. Phys., 1983, **89**, 145; *Atiyah M.F.* Ibid. 1984, **93**, 437.
6. *de Wit B., Nicolai H.* Nucl. Phys., 1984, **B231**, 506; *Dereli T., Panahimoghaddam M., Sudbery A., Tycker R.W.* Phys. Lett., 1983, **126 B**, 33.
7. *Schafer R.D.* "Introduction to nonassociative algebras", New-York: Academic, 1966; *Sudbery A.* Preprint YOI 5DD.
8. *Bryant R.L.* J.Diff. Geom., 1982, **17**, 185.
9. *Adams J.F.* In: "Superspace and supergravity", ed. by S.W.Hawking and M.Roček, Cambridge Univ. Press; 1981.
10. *Dündarer R., Gürsey F., Tze C.-H.* J. Math. Phys., 1984, **25**, 1496.
11. *Манин Ю.И., Хоанг Ле Минь.* Преобразование Радона-Пенроуза для группы $SO(8)$ и инстантоны, (в печати).

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 января 1985 г.