*Письма в ЖЭТФ, том 9, стр.360 – 364* *20 марта 1969 г.*

# СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В СИСТЕМАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗНАКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

*Д.А.Киржниц*

1. Необходимым условием возникновения сверхпроводимости обычно считают отрицательный знак эффективного взаимодействия квазичастиц на границе Ферми (ГФ). В действительности это условие справедливо лишь для взаимодействия, имеющего пик на самой ГФ. Между тем, этот пик может оказаться смещенным относительно ГФ на расстояние, большее его ширины. В этом случае "спаривание" квазичастиц на ГФ

возможно только за счет процессов второго порядка, приводящих к эффективному притяжению при любом знаке взаимодействия, в том числе и для сил отталкивания. В данной работе выясняется количественная сторона этого вопроса и обсуждаются некоторые физические приложения.

2. Исходим из известного уравнения для щели [1]

$$\Delta(\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{p^2}V_{pp'}\frac{\Delta(\xi')}{\sqrt{\xi'^2+\Delta^2(\xi')}},$$

где $\xi = v_F(p-p_F)$; $V_{pp'}$ – эффективное взаимодействие (p, – p – начальные, p', – p' – конечные импульсы квазичастиц). Относя все слабо меняющиеся функции к ГФ, имеем в пределе слабой связи

$$\Delta(\xi) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi'}{\sqrt{\xi'^2+\Delta^2(0)}}\Delta(\xi')U(\xi-\xi'), \qquad (1)$$

где $U$ – умноженное на плотность уровней и усредненное по углам взаимодействие, сильно зависящее обычно лишь от разности аргументов. На языке эффективной диэлектрической проницаемости

$$U = a\int_{\omega/v_F}^{2p_F}(dk/k_\epsilon(\omega,k)),\quad \omega = |\xi-\xi'|,\quad a = e^2/\pi v_F. \qquad (2)$$

Уравнение для определения щели получается из (1)

$$\Delta(0) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2(0)}}\Delta(\xi)\,U(\xi). \qquad (1')$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде:

$$\Delta(\xi) = \Delta(0)\left[1-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi'\chi(\xi,\xi')}{\sqrt{\xi'^2+\Delta^2(0)}}\right],$$

где $\chi$ – регулярное при $\Delta(0)\to 0$ решение уравнения

$$\chi(\xi,\xi') - U(\xi-\xi') + U(\xi') = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi''}{|\xi''|}\chi(\xi,\xi'')[U(\xi''-\xi') -$$

$$- U(\xi')] = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi''}{|\xi''|}[U(\xi-\xi'') - U(\xi'')]\chi(\xi'',\xi').$$

Подставляя выражение для $\Delta(\xi)$ в формулу (1') и вводя новую переменную $\phi(\xi) = -U(\xi) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi'}{|\xi'|}U(\xi')\chi(\xi',\xi)$, получаем

$$1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2(0)}}\,\phi(\xi). \qquad (1'')$$

Оставляя в ($1''$) лишь наиболее сингулярные по $\Delta(0)$ члены, приходим к формуле типа БКШ

$$\Delta(0) \sim \tilde{\omega}\exp(-1/g^2),$$
$$g^2 = \phi(0),\ \ln\tilde{\omega} = -\frac{1}{g^2}\int_0^{\infty} d\xi \ln(2\xi)\,\phi'(\xi), \qquad (3)$$

где $\phi$ – решение уравнения

$$\phi(\xi) = -U(\xi) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi'}{|\xi'|}\phi(\xi')[U(\xi-\xi') - U(\xi)]. \qquad (4)$$

Сверхпроводимость имеет место при $g^2 > 0$, т.е. при[1])

$$U(0) + \int_0^{\infty}\frac{d\xi}{\xi}\phi(\xi)[U(\xi) - U(0)] < 0. \qquad (5)$$

В пределе слабой связи ($g^2 \ll 1$) уравнение (4) может быть решено итерациями. Если $U$ имеет пик шириной $\Delta\xi$ при $\xi = 0$, то в уравнениях (4) и (5) можно ограничиться линейными членами и получается обычная формула БКШ. В обратном случае, когда сдвиг пика относительно ГФ велик по сравнению с $\Delta\xi$, можно считать $U(0) = 0$. При этом существенна вторая итерация уравнения (4) и условие (5) выполняется автоматически. В результате имеем

$$g^2 = \int_0^{\infty}\frac{d\xi}{\xi}U^2(\xi), \qquad \tilde{\omega} \sim \Delta\xi. \qquad (6)$$

3. Второму из рассмотренных случаев отвечает известная модель "желе" [2, 3], для которой $\epsilon(\omega, k) = 1 - (\omega_0^2/\omega^2) + (\kappa^2/k^2)$ ($\omega_0$ – плазменная частота ионов, $\kappa$ – импульс Дебая). Из уравнения (2) получается выражение

$$U(\xi) = -\frac{1}{2x}\ln|1 - x|, \quad x = \frac{1}{a}\left(\frac{\omega_0^2}{\xi^2} - 1\right),$$

исчезающее на ГФ и имеющее высокие, но узкие (шириной $a\omega_0$, где $a \ll 1$ в пределе слабой связи) пики на расстоянии $\sim\omega_0$ от ГФ. Формулы предыдущего раздела дают

$$\Delta(0) \sim a\omega_0 \exp\left(-\frac{8}{\pi^2 a}\right); \qquad (7)$$

---

[1]) Именно в свете этого условия становятся понятными результаты, полученные в изучавшихся ранее моделях (см.например, [1], в которых пришлось столкнуться с фактом появления сверхпроводимости в условиях, когда $U(0) > 0$.

(критическая температура $T_c$ связана с этой величиной обычным образом). Соответствующее значение $g^2$ сильно отличается от полученного в той же модели Де Женом [3] ($g^2 \approx 3Z^{1/3}a$, $Z$ – атомный номер), исходившим из чересчур грубых и неоправданных приближений.

4. Результат Де Жена был использован недавно Гинзбургом и автором [4] для оценки $T_c$ в веществе холодного белого карлика[1]. Правильная формула (7) понижает эту оценку более, чем на порядок (при плотности порядка 10 $г/см^3$). Нужно, однако иметь в виду, что модель "желе", если и применима к твердому телу, то лишь при сверхвысоких сжатиях, когда подавлен вклад поперечных мод и процессов переброса. Более того, даже и в этих условиях модель "желе" неспособна описывать взаимодействие при больших передачах импульса, играющих в нашем случае важную роль. Поэтому обсуждаемая оценка $T_c$ может измениться как в ту, так и в другую сторону. Во всяком случае можно твердо считать, что сверхпроводимость вещества центральной части белого карлика обычного типа полностью исключена из-за экспоненциальной малости $T_c$ (см. (7) и (5))[2]. Что же касается существования сверхпроводящих областей на периферии холодных белых карликов, о которых шла речь в работе [4], то оно представляется вполне возможным.

Автор благодарен В.Л.Гинзбургу за дискуссии.

Физический институт
им. П.Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
26 ноября 1968 г.

## Литература

[1] Н.Н.Боголюбов, В.В.Толмачев, Д.В.Ширков. Новый метод в теории сверхпроводимости. М., 1958.

[2] Д.Пайнс. Элементарные возбуждения в твердых телах. М., 1965.

---

[1] Общее рассмотрение сверхпроводимости сильно сжатого вещества [5] не приводит к сколько-нибудь однозначным выводам.

[2] Противоположный вывод содержится в только что появившейся работе [6], где для $T_c$ получена ошибочная, с нашей точки зрения, неэкспоненциальная формула. При выводе этой формулы отождествляются относительные изменения плотности электронов и ионов, что если и справедливо, то лишь в случае сильной связи $a \gtrsim 1$ (в сильно сжатом веществе, напротив, $a << 1$). Что же касается модели "желе", которая по существу фигурирует в обсуждаемой работе, то ее правильное применение также приводит к экспоненциальной формуле (см. (7)).

[3] П. Де Жен. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М., 1968.
[4] В.Л.Гинзбург, Д.А.Киржниц. Nature, 220, 148, 1968.
[5] А.А.Абрикосов. ЖЭТФ, 41, 569, 1961.
[6] Б.А.Трубников. ЖЭТФ, 55, 1893, 1968.