ВОЗНИКНОВЕНИЕ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В ПЛАЗМЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.В.Гуревич

Дрейф квазинейтральных неоднородностей концентрации электронов и ионов в плазме, находящейся в магнитном поле, в линейном приближении исследован с достаточной полнотой [1]. Цель настоящей работы – рассмотреть простые нелинейные задачи. Примем, что неоднородность одномерна, т.е. зависит лишь от одной пространственной переменной x, и что размер ее достаточно велик: это позволяет пренебречь диффузионными процессами. Воспользовавшись тогда уравнениями (2.1) работы [1] и исключая из них электрическое поле, получим:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[NV(N)] = 0, \tag{1}$$

$$V(N) = \frac{(\sigma_{\parallel e}\cos^2\beta + \sigma_{\perp e}\sin^2\beta)\, v_{ix} + (\sigma_{\parallel i}\cos^2\beta + \sigma_{\perp i}\sin^2\beta)\, v_{ex}}{(\sigma_{\parallel e} + \sigma_{\parallel i})\cos^2\beta + (\sigma_{\perp e} + \sigma_{\perp i})\sin^2\beta}, \tag{2}$$

Здесь β – угол между осью x и магнитным полем $\mathbf{H}$, $\sigma_{\parallel e}, \sigma_{\parallel i}; \sigma_{\perp e}, \sigma_{\perp i}$ – продольные и поперечные компоненты тензоров проводимости для электронов и ионов, v_{ex} и v_{ix} проекции на направление x скоростей дрейфа электронов и ионов в однородной плазме. Уравнение (1) можно также переписать в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + V_{ax}(N)\frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad V_{ax}(N) = \frac{d}{dN}[NV(N)]. \tag{3}$$

Здесь V_{ax} – проекция на ось x скорости амбиполярного дрейфа[1].

---

[1] Отметим, что в формуле (2.8) работы [1] для скорости V_a допущена неточность. Она строго верна лишь для случая слабо ионизированной плазмы. В общем случае

$$V_a = \frac{\partial}{\partial N_0}\left[N_0\,\frac{(\sigma_{\parallel e}\cos^2\beta + \sigma_{\perp e}\sin^2\beta)\, v_{i0} + (\sigma_{\parallel i}\cos^2\beta + \sigma_{\perp i}\sin^2\beta)\, v_{e0}}{(\sigma_{\parallel e} + \sigma_{\parallel i})\cos^2\beta + (\sigma_{\perp e} + \sigma_{\perp i})\sin^2\beta}\right].$$

Соответствующие изменения следует внести также в формулу (2.9) и уравнение (2.4).

Общее решение уравнения (3) можно записать в неявном виде:

$$N = N_0(x - V_{ax}(N)t), \qquad (4)$$

где $N_0(x_0)$ – функция, описывающая распределение концентрации плазмы в начальный момент времени. Вследствие зависимости скорости V_{ax} от N начальное распределение с течением времени деформируется, аналогично тому, как это имеет место для простых волн Римана при одномерном течении сжимаемого газа [2]. В некоторый момент волна перегибается и возникает сильный разрыв в распределении концентрации электронов и ионов. Момент образования разрыва t_c и значение N_c в месте образования разрыва определены условиями:

$$\frac{\partial x}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial N^2} = 0$$

или:

$$\left(\frac{dV_{ax}}{dN}\,\frac{d^2x_0}{dN^2}\right)_{N=N_c} = \left(\frac{d^2V_{ax}}{dN^2}\,\frac{dx_0}{dN}\right)_{N=N_c};$$

$$t_c = -\left(\frac{dx_0/dN}{dV_{ax}/dN}\right)_{N=N_c}. \qquad (5)$$

Здесь $x_0(N)$ функция обратная $N_0(x_0)$, функция $V_{ax}(N)$ определена формулами (2), (3).

Скорость разрыва V_p определяется из условия сохранения потока частиц через поверхность разрыва. Это дает:

$$V_p = (N_1V_1 - N_2V_2)/(N_1 - N_2). \qquad (6)$$

Здесь N_1 и N_2 – концентрации слева и справа от разрыва $V_1 = V(N_1)$, $V_2 = V(N_2)$ скорости, определенные формулой (2). В случае слабого разрыва $(N_1 - N_2) \to 0$, скорость V_p совпадает со скоростью линейного дрейфа V_{ax}, как это и должно быть. Значения концентраций N_1 и N_2 в каждый момент времени определены уравнением (4) (верхнее и нижнее решение) при дополнительном условии сохранения полного числа частиц:

$$\int N(x,t)dx = \int N_0(x_0)dx_0.$$

При определении структуры фронта разрыва следует учесть диффузионные члены. Из уравнений (2.1) работы [1] получаем:

$$D_a(N)\frac{dN}{dz} = N[V(N) - V_p] - N_2(V_2 - V_p) = N_1(V_1 - V_p) - N[V_p - V(N)]. \quad (7)$$

Здесь $z = x - V_p t$, $D_a(N)$ коэффициент амбиполярной диффузии ([1], формула (1.12)). Отсюда прямым интегрированием определяется в неявном виде зависимость N от z. Видно, что ширина фронта разрыва

$$L = \frac{D_a(N_p)}{N_1|V_1 - V_p|} = \frac{D_a(N_p)}{N_2|V_2 - V_p|}. \quad (8)$$

Здесь N_p – значение концентрации, при котором $V(N_p) = V_p$. Как обычно, L растет с уменьшением величины разрыва.

Рассмотрим для примера дрейф плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Пусть имеется неоднородность в направлении $x \parallel [EH]$. Для скорости $V(N)$ из (2) тогда получаем:

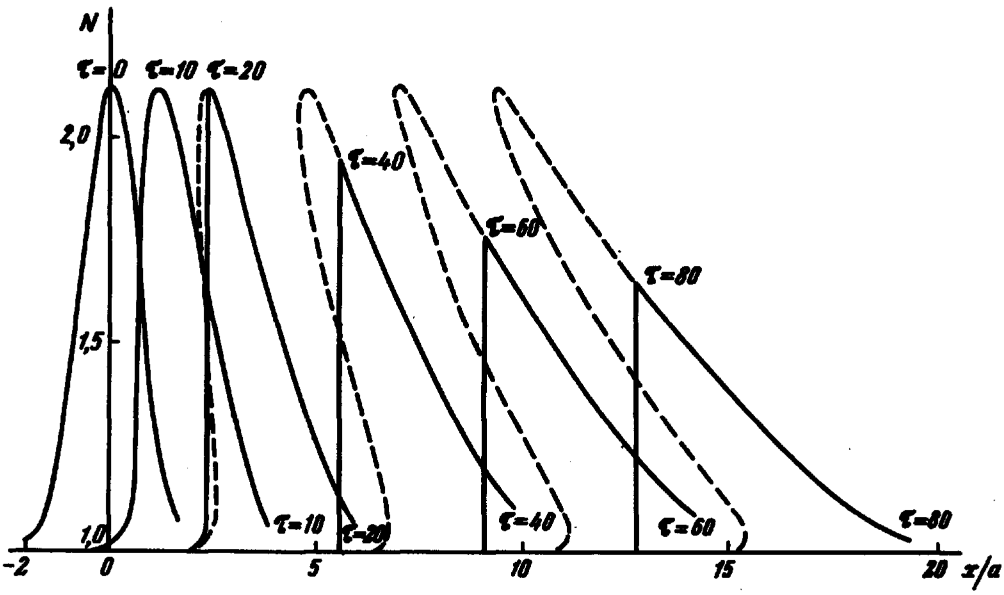
$$V(N) = \frac{eE\Omega_H}{M} \times$$

$$\times \frac{\omega_H^3\Omega_H + 2\omega_H^2\nu_{el}\nu_{im} + \frac{M}{m}\omega_H^2\nu_{im}^2 + (\nu_{el}+\nu_{em})(\nu_{em}^2\nu_{im} + \frac{M}{m}\nu_{el}\nu_{im}^2}{[\nu_{im}(\nu_{el}+\nu_{em}) + \omega_H\Omega_H][(\nu_{em}+\nu_{el})^2\nu_{im}^2 + \omega_H^2(\nu_{im}^2 + 2\frac{m}{M}\nu_{el}\nu_{im} + \Omega_H^2)]}.$$

Здесь ν_{el} – частота столкновений электронов с ионами, она пропорциональна N; ν_{em} и ν_{im} частоты столкновений с нейтральными атомами (молекулами), ω_H и Ω_H – гирочастоты для электронов и ионов. В слабоионизированной плазме, когда частотой столкновений ν_{el}, можно пренебречь, скорость V не зависит от N и форма неоднородности не искажается: движение ее носит всегда линейный характер. Напротив, при достаточно высоких степенях ионизации зависимость V от N может быть весьма существенной. Например, при $\nu_{el}(N_0) = \nu_{em}$, $\nu_{im}\nu_{em} = \omega_H\Omega_H$ из (9) получаем (при $N/N_0 \ll \sqrt{M/m}$):

$$V(N) = c\,\frac{E}{H}\,\frac{1}{2 + N/N_0}; \qquad V_{ax} = c\,\frac{E}{H}\,\frac{2}{(2 + N/N_0)^2}. \quad (10)$$

Изменение со временем неоднородности для этого случая изображено на рисунке. Сплошные кривые соответствуют различным моментам времени $t = (a/V_{N=N_0})\tau$ (a – характерный размер). Как видно из рисунка,



в момент времени $t = 12a/V_{N=N_0}$ образуется разрыв. Величина разрыва вначале быстро нарастает, а затем падает с ростом t. Вся неоднородность с течением времени расплывается вследствие нелинейной дисперсии скорости дрейфа. Видна нелинейная диссипация неоднородности.

Автор признателен Л.В.Парийской за проведение численного расчета.

Физический институт
им.П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
17 июня 1968 г.

Литература

[1] А.В.Гуревич, Е.Е.Цедилина. УФН, 91, 609, 1967.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953, стр.451.