Письма в ЖЭТФ, том 11, стр. 410 – 413 *20 апреля 1970 г.*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ

Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко

Известно, что в стационарных электронных конфигурациях (автостабилизированный пучок Будкера [1], кольца Векслера [2]) уменьшение кулоновских сил расталкивания достигается с помощью лоренцовских сил стягивания токов релятивистских электронов. Поскольку ограничение амплитуды волн в плазме связано с действием куловноского расталкивания электронов, то естественно возникает вопрос о возможности возбуждения волн большой амплитуды при условии указанной компенсации. Такая ситуация может иметь место при распространении волн вдоль оси электронного пучка, частицы которого вращаются по азимуту (система типа E-слоя [3]). В этом случае волна плотности заряда приводит к колебаниям тока частиц в пучке $j'_{\phi}(z - v_{\phi}t) = -ev_0 n'(z - v_{\phi}t)$ (v_0 – азимутальная скорость пучка) и, следовательно, к возникновению магнитного поля волны $H_r(z - v_{\phi}t)$. Связанная с этим магнитным полем сила самостягивания сгустков, на которые волна разбивает пучок, $F_H = \frac{e}{c} v_0 H_r$ так же как и в стационарном случае находится в противофазе с кулоновской силой $F_E = -eE_z$ и при $v_0 \approx \sqrt{c^2 - v_{\phi}^2}$ приводит к существенному уменьшению смещения электронов в поле волны. При этом в пучке может распространяться волна с весьма большой амплитудой электрического поля без возникновения пересечения траекторий и опрокидывания фронта волны. Этот результат указывает на возможность эффективного использования волн в релятивистких пучках для осуществления предложенного в [4] плазменного метода ускорения.

Для простоты мы рассмотрим в настоящей работе случай прямоугольной геометрии: электронный пучок движется по оси y и ограничен по x. Электронный заряд пучка предполагается частично скомпенсированным ионами и в равновесии сила кулоновского расталкивания, действующая на электроны, $-eE_x$ компенсируется магнитной силой $-\frac{e}{c} v_0 H_z$, где $H_z(x)$ – созданное электронным током магнитное поле. Такого типа равновесные решения рассматривались в [1, 5].

Волна возникающая в таком электронном пучке может быть описана с помощью обычной гидродинамической системы уравнений. Все волновые величины, входящие в эти уравнения, зависят от $\xi = z - v_{\text{ф}}t$, поперечные градиенты этих величин малы по сравнению с продольными

$$\left|\frac{d\ln f}{d\xi}\right| \Big/ \left|\frac{d\ln f}{dx}\right| \sim ka >> 1 \tag{1}$$

(a – поперечный размер пучка, k – волновое число).

Уравнения движения имеют тогда следующий интеграл энергии

$$\mathcal{E} - v_{\text{ф}} p_z = \mathcal{E}_0 + v_0 (p_y - p_0) + e\phi - \frac{e}{c} v_0 A_y . \tag{2}$$

В этом уравнении $A(\xi)$, $\phi(\xi)$ – векторный и скалярный потенциалы волны, $\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ – энергия электронов, $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2}$ – равновесное значение энергии в точке $\phi = A_y = 0$.

Собственное магнитное поле тока пучка $H_z(x)$ замагничивает поперечные волновые движения в пучке, поскольку циклотронная частота электронов в этом поле $\omega_{Hz} \approx \frac{\omega_0^2 a}{c} >> \omega_0$, а частота исследуемых колебаний $\omega \lesssim \omega_0$ $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m\gamma_0}}\right.$ – ленгмюровская частота, $\left.\gamma_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)$.

В этих условиях

$$v_x = p_x = 0, \qquad v_y = v_0 ,$$

$$p_y = \frac{v_0}{c^2}\,\mathcal{E} = p_0\left[1 + \frac{e\left(\phi - \frac{v_0}{c} A_y\right) + p_z v_{\text{ф}}}{\mathcal{E}_0}\,\gamma_0^2\right], \tag{3}$$

а уравнение для потенциала $\phi(\xi)$ имеет вид:

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = 4\pi e n_0 \frac{c^2}{c^2 - v_{\text{ф}}^2\gamma_0^2}\left[\frac{v_{\text{ф}}\gamma_0 w}{\sqrt{w^2c^2 - m^2c^4(c^2 - v_{\text{ф}}^2\gamma_0^2)}} - 1\right], \tag{4}$$

где $w = mc^2 + e\phi\,\dfrac{c^2 - v_{\text{ф}}^2\gamma_0^2}{\gamma_0(c^2 - v_{\text{ф}}^2)}$.

Решение (4) приводит к следующему нелинейному дисперсионному уравнению для рассматриваемой волны:

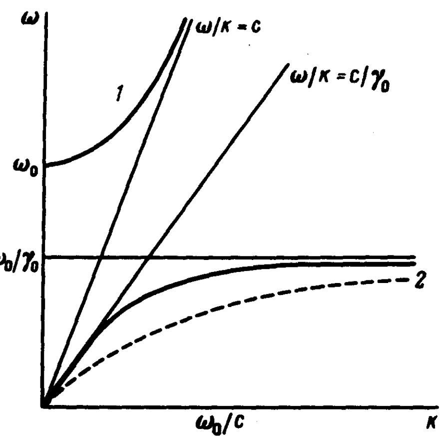
$$k^2 v_{\text{ф}}^2 = \omega_0^2 \frac{c^2 - v_{\text{ф}}^2\gamma_0^2}{(c^2 - v_{\text{ф}}^2)\gamma_0^2}\,\frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}\left(\frac{\pi}{2E(\kappa)}\right)^2 . \tag{5}$$

Волновое число $k = 2\pi/\xi_0$, ξ_0 – период $\phi(\xi)$.

$$\lambda = 1 + \frac{E^2_{max}}{4\pi n_0 \mathcal{E}_0} \frac{c^2 - v_ф^2 \gamma_0^2}{\gamma_0^2 (c^2 - v_ф^2)},$$

E_{max} – амплитуда продольного электрического поля в волне $E_z(\xi)$.

$\kappa^2 = 2\sqrt{\lambda^2 - 1}/\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$, $E(\kappa)$ – полный элиптический интеграл второго рода. Из уравнения (5) следует, что в элктронном пучке существуют два типа волн (см. рисунок) – быстрые волны с $v_ф > c$ (кривая *1*) и медленные волны, фазовая скорость которых изменяется в пределах $0 < v_ф < \frac{c}{\gamma_0} = \sqrt{c^2 - v_0^2}$



Дисперсионные зависимости $\omega(k)$ для волн в азимутальном, электронном пучке, сплошные кривые относятся к случаю малых амплитуд ($\lambda \to 1$), пунктиром показан случай максимально возможных амплитуд, определяемых формулой (7)

(кривая *2*). С ростом амплитуды медленной волны ее частота при заданном k уменьшается, однако пределы, в которых меняется фазовая скорость этой волны и максимальное значение частоты $\omega_{max} = \frac{\omega_0}{\gamma_0}$ не изменяются. Медленная волна имеет значительные составляющие как продольного E^{ℓ} так и поперечного E^{tr} электрического поля, связь между этими составляющими при $v_ф \approx \frac{c}{\gamma_0}$ определяется соотношением:

$$E^{\ell} = - \frac{v_0}{v_ф} E^{tr} . \qquad (6)$$

Магнитная сила, действующая в продольном направлении на электроны пучка

$$F_H = \frac{e}{c} v_0 H_x = - \frac{e}{c} v_0 \frac{dA_y}{d\xi} = - e \frac{v_0^2}{c^2 - v_ф^2} \frac{d\phi}{d\xi}$$

при $v_ф \to \sqrt{c^2 - v_0^2}$ компенсирует кулоновскую силу $F_E = e \frac{d\phi}{d\xi}$. В этих условиях следует ожидать существенного увеличения максимально возможного значения амплитуды волны.

Действительно, из уравнения (4) обычным путем можно получить следующую формулу для максимальной амплитуды продольного электрического поля, при которой происходит "опрокидывание" фронта волны $E_{max\ max}$:

$$E^2_{max\ max} = 8\pi n_0 \mathcal{E}_0 \left(1 - \frac{v_\phi^2}{c^2}\right) \frac{1 - \left(1 - \frac{v_\phi^2 \gamma_0^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v_\phi^2 \gamma_0^2}{c^2}\right)^{3/2}} . \tag{7}$$

$$\left(0 < v_\phi < \frac{c}{\gamma_0}\right) .$$

При $\omega \approx \frac{\omega_0}{\gamma_0}$ $| v_\phi << \frac{c}{\gamma_0} |$ амплитуда $E_{max\ max}$ достаточно мала

$$\frac{E^2_{max\ max}}{8\pi} \approx n_0 m v_\phi^2 \gamma_0^3 << n_0 \mathcal{E}_0 . \tag{8}$$

При приближении v_ϕ к $\frac{c}{\gamma_0}$ амплитуда $E_{max\ max}$ быстро возрастает, оставаясь, однако, ограниченной, так как в силу условия (1) v_ϕ не может быть сколь угодно близким к $\frac{c}{\gamma_0}$. Используя это, условие и дисперсионное уравнение (5) можно получить следующую оценку сверху на $E_{max\ max}$:

$$\frac{E^2_{max\ max}}{8\pi} \sim n_0 \mathcal{E}_0 \frac{\omega_0^2 a^2}{c^2} . \tag{9}$$

Поскольку параметр $\frac{\omega_0 a}{c} >> 1$, максимальная энергия электрического поля волны существенно превышает энергию пучка.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской СССР

Поступила в редакцию
9 марта 1970 г.

Литература

[1] Г.И.Будкер. Proc. Symp. CERN, 1, 68, 1956.

[2] В.И.Векслер, В.П.Саранцев и др. Доклад на 4-й международной конференции по ускорителям, Кембридж, США, 1967; Препринт ОИЯИ Р93440-2, 1967, г. Дубна.

[3] N.Christofilos. Proc. 2-nd Geneva Conf; 32, 279, 1958.

[4] Я.Б.Файнберг. Proc. Symp. CERN, 1, 84, 1956.

[5] W.H.Bennett. Phys. Rev., 45, 89, 1934.