Письма в ЖЭТФ, том 11, стр. 547 – 549 *5 июня 1970 г.*

СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ

А.В.Тимофеев

1. Согласно установившимся к настоящему моменту представлениям считается, что развитие неустойчивых колебаний в плазме может приводить к установлению стационарного турбулентного состояния. Степень развития турбулентности характеризуется временем корреляции t_c , которое полагается равным обратному инкременту $t_c \approx \gamma^{-1}$. Если $\omega t_c >> 1$, то турбулентность считается слабой, если $\omega t_c \approx 1$ – сильной, ω – частота колебаний. Не вызывает сомнения, что сильная турбулентность дожна активно способствовать установлению термодинамического равновесия. Считается [1], что аналогичное воздействие слабой турбулентности будет ослаблено в ωt_c раз. Эти соображения обычно использовались для оценки турбулентных коэффициентов переноса, например коэффициента диффузии, вызываемого дрейфовыми колебаниями. Анализ кинетического уравнения для волн подтверждает возможность такого подхода [2]. Заметим, что последнее ввиду его сложности никогда точно не решалось.

Однако, по нашему мнению корректное определение коэффициентов переноса невозможно без знания спектра неустойчивых колебаний. На примере диффузии, вызываемой низкочастотными колебаниями дрейфового типа, показано, что обычно используемые значения коэффициента диффузии, по-видимому, существенно завышены. Для того, чтобы получить этот результат рассматривалось изменение дисперсии координат частиц плазмы под действием хаотических электрических полей. Эквивалентный подход используется в теории турбулентности обычной жидкости, где некоторые из приводимых ниже формул имеют свои аналоги, см., например, [3].

2. Рассмотрим диффузию плазмы в магнитном поле, вызываемую хаотическими электрическими полями с частотой ω много меньшей циклотронной ω_c. Уравнение движения в системе координат, где средняя скорость равна нулю, имеет вид:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{c}{H^2}[\mathbf{H}\mathbf{E}(t)] \ . \qquad (1)$$

Учитывая связь коэффициента диффузии D с изменением дисперсии координат отдельных частиц $D = 2(d/dt) < \mathbf{r}^2 >$, получаем

$$D = 4(c^2/H^2) > \int_{-\infty}^{0} k(t)\, dt. \qquad (2)$$

Здесь $K(t) = < \mathbf{E}(0)\,\mathbf{E}(t) >$ – корреляционная функция ,скобки означают усреднение по ансамблю. Мы рассматриваем слабую турбулентность, поэтому $K(t) = F(t/t_c)\cos\omega t$, где $\omega t_c >> 1$. Разложим $F(t/t_c)$ по степеням $F(t/t_c) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/n!)(t/t_c)^n$, тогда из (2) получаем см. [4]:

$$D = 4(c^2/H^2)(1/\omega) \sum_{n=0}^{\infty} [a_n/(\omega t_c)^n] \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) . \qquad (3)$$

Здесь четные члены с $n = 2k$ обращаются в нуль. Сумма по модам колебаний для краткости опущена. Если предположить, что a_0 и a_1 равны по порядку величины и учесть, что $a_0 = K(0) = < E^2 >$, то с помощью (3) легко получить обычно используемое выражение для коэффициента диффузии $D = \gamma^2/\omega k^2$, см., например, [1]. Однако, для вещественного стационарного случайного процесса $E(t)$, которому соответствует четная корреляционная функция $K(t) = K(-t)$ условие $a_1 \neq 0$ означало бы, что величина $\partial E/\partial t$ не существует, см., например, [5]. Между тем эта величина имеет физический смысл, входя в уравнение Максвелла. В то же время маловероятно, чтобы все коэффициенты a_{2k+1} равнялись нулю, поскольку тогда турбулентность была бы "квазислучайной", так как предистория процесса $E(t)$ однозначно определяла бы его дальнейший ход, см. [5]. Таким образом, по-видимому, какие-то из коэффициентов $a_{2k+1} (k \geqslant 1)$ не равны нулю, и следовательно,

$$D \approx \frac{4}{\omega} \frac{c^2}{H^2} \frac{a_{2k'+1}}{(\omega t_c)^{2k'+1}} ,$$

т. е. меньше обычно используемого значения в $(\omega t_c)^{2k'}$. Здесь $k' = k_{min}$, при котором $a_{2k+1} \neq 0$ [1].

Если все-таки предположить, что турбулентность "квазислучайна" $F(t/t_c) = f(t^2/t_c^2)$, то при $\omega t_c >> 1$ получим экспоненциально малые значения D^c. Так например, при $F(t/t_c) = a_o/(1 + t^2/t_c^2)$

$$D = 2\pi \frac{c^2}{H^2} a_o t_c e^{-\omega t_c} . \qquad (4)$$

В конечном счете турбулентная диффузия обязана резонансному взаимодействию колебаний с частицами плазмы. Действительно, с помощью соотношения $S(\omega') = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} dt \cos \omega t K(t)$, где $S(\omega')$ – спектральная плотность (интенсивность) колебаний, приводим (2) к виду:

$$D = 4\pi \frac{c^2}{H^2} S(0) . \qquad (5)$$

Напомним, что используется система координат, в которой частицы в среднем покоятся, поэтому колебания с $\omega = 0$ резонируют с частицами. Резонансное взаимодействие будет значительным при сильном уширении спектральных линий.

В заключение приведем без доказательства некоторые простые результаты. 1) Учет инерции в (1) не меняет величины D до второго порядка по ω/ω_c включительно. 2) Процедура, аналогичная изложенной выше, позволяет найти коэффициент диффузии в пространстве скоростей, который определяет интенсивность нагрева плазмы колебаниями. 3) Если слабая турбулентность "квазислучайна", то как диффузия, так и нагрев практически отсутствуют. 4) Наше рассмотрение не затрагивает результатов квазилинейной теории и теории сильной турбулентности.

Автор благодарен Б.Б.Кадомцеву за полезные советы.

Поступила в редакцию
24 апреля 1970г.

Литература

[1] Б.Б.Кадомцев. Сб. Вопросы теории плазмы, 4, М., Атомиздат, 1964.

[2] A.V.Timofeev.Nucl. Fusion, 8, 13, 1968.

[3] И.О.Хинце. Турбулентность, М., Физматгиз, 1963.

[4] А.Эрдейи. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1963.

[5] А.А.Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. М., Изд. Наука, 1964.

---

[1] Если все $a_{2k+1} = 0$, то спектральная плотность $S(\omega')$ при $|\omega - \omega'| \to \infty$ спадает по экспоненте; если $a_{2k'+1} \neq 0$, то $S(\omega')_{|\omega - \omega'| \to \infty} \sim$ $\sim (\omega - \omega')^{-2(k'+1)}$ и случайный процесс является марковским [5], т. е. заведомо необратимым.