Письма в ЖЭТФ, том 12, стр. 32 – 34 *5 июля 1970 г.*

О ФАКТОРИЗАЦИИ N-ТОЧЕЧНОЙ ДУАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ

Ю.Г.Вербецкий, Э.В.Гедалин

Недавно был достигнут значительный прогресс в изучении N-точечных амплитуд Венециано B_N. Мандельстам [1] и Олесен [2,3] показали, что B_N факторизуется, если пересечения реджевских траекторий зависят билинейно от аддитивных "квантовых чисел" b_i внешних частиц.

Условие согласованности связи траекторий с внешними частицами приводит к сохранению этих "квантовых чисел": $\sum\limits_{i=1}^{N} b_i = 0$ но заставляет приписывать одинаковым внешним частицам одновременно квантовые числа b_i обеих знаков.

В настоящей работе рассматривается факторизация амплитуды Венециано для заданного конечного набора траекторий. Как обычно, принимается, что все частицы, – как внешние, так и резонансы, – лежат на этих траекториях, имеющих универсальный наклон a'.

Пусть имеем 2^n траекторий, каждой из которых однозначно сопоставляется набор n "квантовых чисел" $\{T^a\}$, $T^a = \pm 1$, $a = 1, 2, \ldots, n$

Для того, чтобы реджевские траектории в любом из дуальных каналов (i, j) амплитуды B_N однозначно определялись по "квантовым числам" внешних частиц, достаточно потребовать выполнения в каждом канале условий

$$\prod_{k=i}^{j} T_k^a = T_{(ij)}^a , \qquad (1)$$

где $\{T_{(ij)}^a\}$ – "квантовые числа", соответствующие реджевской траектории в канале (i, j).

Обозначим через G^μ $(\mu = 5, 6, \ldots, 2^n + 3)$ несовпадающие произведения "квантовых чисел" T^a реджевской траектории и положим $G^\mu = 1$ при $\mu = 1, 2, 3, 4$. Тогда пересечение для любой реджевской траектории в канале (i, j) в общем случае запишется в виде

$$A_{ij} = \sum_{\mu=4}^{2^n+3} \beta^\mu \prod_{k=i}^{j} G_k^\mu , \qquad (2)$$

где k – индексы внешних частиц блока. Очевидно, что β^μ являются линейными комбинациями пересечений 2^n(заданных) различных траекторий.

Амплитуда факторизуется, если линейные комбинации пересечений

$$C'_{k\ell} = A_{k\ell} + A_{k+1,\ell-1} - A_{k+1,\ell} - A_{k,\ell-1}$$

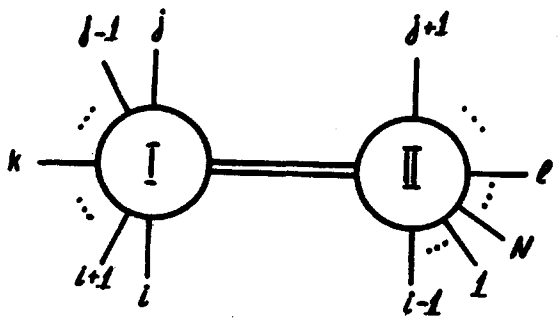
могут быть представлены в виде билинейной формы $C'_{k\ell} = 2a' \sum\limits_{\mu=5}^{M} d_k^\mu d_\ell^\mu$, где d_k^μ и d_ℓ^μ относятся к I и II блокам на рисунке соответственно.

Для пересечений $A_{k\ell}$ в форме (2) имеем

$$C'_{k\ell} = \sum_{\mu=5}^{2^n+3} \beta^{\mu} \prod_{s=k+1}^{\ell-1} G_s^{\mu} (1 - G_k^{\mu})(1 - G_{\ell}^{\mu}). \qquad (3)$$

Введем теперь $(2^n - 1)$ – мерные „импульсы"

$$p^{\mu} = \sqrt{\beta^{\mu}}(1 - G^{\mu}) \qquad \mu = 5, 6, \ldots, (2^n + 3). \qquad (4)$$



Показатели степеней в формуле Бардачи – Руегга для амплитуды B_N принимают вид (A – пересечение траектории, для которой все $G^{\mu} = 1$):

$$\gamma_{k\ell} = -\sum_{\mu=1}^{4} p_k^{\mu} p_{\ell}^{\mu} - \sum_{\mu=5}^{2^n+3} \left(p_k^{\mu} \prod_{s=k+1}^{j} G_s^{\mu}\right)\left(p_{\ell}^{\mu} \prod_{t=j+1}^{\ell-1} G_t^{\mu}\right) -$$

$$- \delta_{k,\ell-1}(2 - A) \qquad (5)$$

и, очевидно, амплитуда B_N полностью факторизуется. Ясно, что в этом случае степень вырождения уровней $\alpha(s) = J$ зависит от количества „квантовых чисел" $\{T^{\alpha}\}$. Асимптотически плотность уровней

$$d(J) \sim \exp\left[\frac{2\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{(2^n + 3)J}\right].$$

Нетрудно обобщить операторный формализм Фубини – Гордона – Венециано [4] на рассмотренный выше случай 2^n различных реджевских траекторий. Помимо обычных операторов $a_{r,\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) введем дополнительно $(2^n - 1)$ наборов операторов $a_{r,\mu}$ ($\mu = 5, 6, \ldots, (2^n - 1)$) соответствующих дополнительным компонентам импульса p^{μ}. Тогда вершинные операторы и пропагаторы запишутся в виде

$$\hat{V}_{ijk} = \theta_{ijk} \exp\left[p_j \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_k^{+}}{\sqrt{r}}\right] \hat{Q}_j \exp\left[p_j \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{\sqrt{r}}\right],$$

$$\hat{D}_{\ell m} = \prod_{\mu=1}^{2^n+3} \delta\,[G^\mu_\ell,\ G^\mu_m] \int_0^1 du_\ell u_\ell^{\hat{R}_\ell}(1-u_\ell)^{A-2} \quad ,$$

где

$$\theta_{ijk} = \frac{1}{2}\Big(1 + \prod_{a=1}^{n} T_i^a T_j^a T_k^a\Big) \quad ,$$

$$\hat{Q}_j = \prod_{\mu=1}^{2^n+3} (G^\mu_j)^{h_\mu} \; ; \qquad h_\mu = \sum_{r=1}^{\infty} a^+_{r,\mu} a_{r,\mu} \; ,$$

$$\delta\,[G^\mu_\ell;\ G^\mu_k] = \begin{cases} 1 & G^\mu_\ell = G^\mu_k \\ 0 & G^\mu_\ell \neq G^\mu_k \end{cases} \quad ,$$

$$\hat{R}_\ell = -A - \frac{1}{2} p^2_\ell + \sum_{r=1}^{\infty} r\, a^+_{r,\mu} a_{r,\mu}$$

$$p_j a_r = \sum_{\mu=1}^{2^n+3} p^\mu_j a_{r,\mu} \; .$$

Множитель θ_{ijk} в операторе вершины обеспечивает выполнение условия (1) в каждой вершине. Необходимость введения множителя $\hat{Q}_j$ диктуется наличием произведения $\prod_{s=k+1}^{\ell-1} G^\mu_s$ во втором члене правой части (5): эти множители автоматически возникают в $\gamma_{\ell k}$ при приведении операторов $\hat{V}\hat{D}\hat{V} \ldots \hat{D}\hat{V}$ к нормальному произведению.

Таким образом, в рассмотренном нами случае амплитуда Венециано B_N при любом N факторизуется для конечного числа (2^n) различных основных траекторий, в отличие от случая, рассмотренного Олесеном [3], где спектр основных траекторий бесконечен.

Авторы искренне признательны Ю.К.Краснову за полезные обсуждения.

Институт физики
Академии наук Грузинской ССР

Поступила в редакцию
19 мая 1970г.

Литература

[1] S.Mandelstam. Berkeley preprint UCRL-19327, 1969.

[2] P.Olesen. CERN preprint TH-1100, 1969.

[3] P.Olesen. CERN preprint TH-1131, 1970.

[4] S.Fubini, D.Gordon, G.Veneziano. Phys. Lett., 29B, 679, 1969.