Письма в ЖЭТФ, том 12, стр. 419 – 422 *20 октября 1970 г.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ОБ АНОМАЛЬНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ПЛАЗМЫ

Г.Е.Векштейн, Д.Д.Рютов, Р.З.Сагдеев

Пусть в однородной плазме имеется постоянное однородное электрическое поле E, параллельное магнитному и достаточно большое для того, чтобы можно было пренебречь парными столкновениями. При этом электроны свободно ускоряются до тех пор, пока скорость их направленного движения не превышает порога возбуждения колебаний звукового типа, после чего в плазме возникает неустойчивость, приводящая к торможению электронов и появлению так называемого "аномального сопротивления". За время порядка нескольких обратных инкрементов система возвращается к пороговому состоянию и далее все время остается в этом состоянии. Однако вследствие того, что порог токовой неустойчивости пропорционален среднеквадратичной скорости частиц плазмы, которая непрерывно нарастает под действием электрического поля, то ток будет также возрастать со временем.

Через достаточно большой промежуток времени среднеквадратичная скорость частиц плазмы увеличивается настолько, что плазма "забывает" о своем исходном состоянии и дальнейшая эволюция системы приобретает некоторый универсальный характер, не зависящий от начальных условий. В нашей работе найдены функции распределения заряженных частиц и спектр колебаний в этом режиме, который мы называем асимптотическим. При этом показано, что аномальное сопротивление в асимптотическом режиме фактически отсутствует.

Поставленная задача может быть решена на основе квазилинейных уравнений [1)]. Формально наличию асимптотического режима соответствует возможность перехода в квазилинейных уравнениях к автомодельным переменным [1]. При этом из простых размерных соображений следует, что скорости частиц должны измеряться в единицах eEt/m, а волновые векторы колебаний – в единицах $m\omega_{pe}/eEt$, где e и m, соответственно, заряд и масса электрона, а ω_{pe} – электронная плазменная частота.

Рассмотрим более подробно одномерное решение, которое осуществляется, когда ионная циклотронная частота ω_{Hi} существенно превышает ионную плазменную частоту ω_{pi}. В этом случае функции распределения электронов и ионов $f_{e,i}$ и спектральная плотность электростатической энергии колебаний W имеют вид:

$$f_e(v,t) = \frac{mn\,g_e(u)}{eEt}, \quad f_i(v,t) = \frac{mn\,g_i(u)}{eEt}, \quad W(k,t) = m\omega_{pe}^4 t^2 U(q),$$

$$u = mv/eEt, \quad q = keEt/m\omega_{pe}$$

---

1) Роль нелинейных эффектов асимптотически убывает со временем, поскольку отношение энергии колебаний к кинетической энергии частиц, как будет видно из дальнейшего, пропорционально t^{-1}.

(n — концентрация плазмы). Подставляя эти функции в квазилинейные уравнения, записанные в системе отсчета, связанной со свободно ускоряющимися ионами, получим:

$$-\frac{d}{du}(u-1-\mu)\,g_e = \frac{d}{du}D(u)\frac{dg_e}{du}\quad, \qquad (1)$$

$$-\frac{d}{du}ug_i = \mu^2\frac{d}{du}D(u)\frac{dg_i}{du}\quad, \qquad (2)$$

где $D(u)$ — квазилинейный коэффициент диффузии, а $\mu = m/M$. Вместе с условием равенства нулю инкремента колебаний,

$$\frac{d}{du}(g_e+\mu g_i) = 0 \qquad (3)$$

уравнения (1) и (2) образуют замкнутую систему, которая имеет следующее решение [1]:

$$g_e = \frac{Cu}{u+\mu^2}\,,\quad g_i = \frac{C\mu(1-u)}{u+\mu^2}\,,\quad D = \frac{u^2(1-u)}{\mu^2}\quad \text{при } 0<u<1, \qquad (4)$$

$$g_e = g_i = D = 0 \quad \text{при } u<0 \text{ и } u>1,$$

где C — произвольная положительная постоянная. К функциям $g_e(u)$ и $g_i(u)$ можно добавить некоторое число свободно ускоряющихся электронов и ионов, которым в автомодельном решении соответствуют дельта-функции в точке $u=1$ для электронов и $u=0$ для ионов. Обозначая доли свободно ускоряющихся частиц через X_e и X_i, из условия нормировки сразу находим, что $X_e + C = 1$, $X_i + 2C\mu\ln\mu^{-1} = 1$.

Зная функции g_e и g_i легко записать дисперсионное соотношение:

$$\epsilon(q,\ \omega) = 1 - \frac{1-C}{(\omega-q)^2} - \frac{\mu}{\omega^2} + \frac{C}{\omega q} - \frac{C}{(\omega-q)\,q}\,,$$

где частота измеряется в единицах ω_{pe}. Функция $\epsilon(q,\ \omega)$ должна удовлетворять следующим двум требованиям: 1) все колебания должны быть устойчивыми; 2) должны существовать колебания со всеми фазовыми скоростями в интервале (0,1). Из этих условий можно однозначно определить константу C (которая оказывается равной $2\mu^{1/2}$) и, тем самым, функции распределения $g_{e,i}$. Что же касается спектра колебаний, то его можно найти по формуле

---

[1] В дальнейших вычислениях мы будем для простоты считать $\mu \ll 1$, хотя можно получить и точное решение, справедливое при любом отношении масс электронов и ионов.

$$U(q) = \frac{eE^3}{8\pi^2 m^2 \omega_{pe}^4} \left| \frac{d\omega(q)}{dq} - \frac{\omega(q)}{q} \right| D\left[\frac{\omega(q)}{q}\right]$$

Тем самым задача оказывается полностью решенной.

Перечислим основные качественные особенности полученного решения: 1) почти все электроны и ионы свободно ускоряются электрическим полем ($X_e = 1 - 2\mu^{1/2}$, $X_i = 1 - 4\mu^{3/2}\ln\mu^{-1}$); 2) несмотря на это система находится на пороге неустойчивости, что обеспечивается наличием малых групп электронов и ионов, "размазанных" по скоростям; 3) имеются очень "горячие" ионы с энергиями в μ^{-1} раз больше энергии свободно ускоряемых электронов (относительная концентрация таких ионов равна примерно $\mu^{3/2}$); 4) в асимптотическом режиме энергия ленгмюровских колебаний сравнима с энергией звуковых колебаний.

Найденное решение относится к очень сильным магнитным полям ($\omega_{He} >> \mu^{-1/2}\omega_{pe}$). В меньших магнитных полях ($\omega_{pe} << \omega_{He} << \mu^{-1/2}\omega_{pe}$) возникает неустойчивость одномерного решения относительно возбуждения "косых" волн, и спектр колебаний становится существенно трехмерным. Анализ показывает, что в этом случае система стабилизируется за счет "размазки" ионной функции распределения в поперечном направлении; что же касается электронов, то они попрежнему ускоряются компактной группой. Только в еще меньших полях, при $\omega_{He} << \omega_{pe}$, тепловой разброс электронов становится порядка их токовой скорости. Особо следует подчеркнуть, что ленгмюровские колебания играют важную роль в формировании решения при любых магнитных полях.

Все вышеприведенные результаты можно легко обобщить на случай, когда электрическое поле изменяется во времени (но не переходит через нуль!): для этого следует просто ввести новые автомодельные переменные $v = mv/e\int_0^t E dt'$ и $q = ke\int_0^t E dt'/m\omega_{pe}$.

Характерной особенностью описанных решений является наличие убегающих электронов. Ситуация совершенно меняется, если ток течет поперек магнитного поля [1]: убегающие электроны полностью исчезают. Если же при этом эффективная частота столкновений электронов с колебаниями не превышает ω_{He} (как это обычно бывает в экспериментах с ударными волнами), то в системе координат, движущейся относительно ионов с дрейфовой скоростью cE/H, функция распределения электронов оказывается вообще аксиально-симметричной относительно H, и токовая скорость электронов становится много меньше тепловой. Чтобы проиллюстрировать последнее утверждение, мы рассмотрели модельную задачу, в которой считается, что колебания возбуждаются только в направлении электронного тока. Такая задача описывается уравнениями, которые по своей формальной структуре близки к уравнениям (1) – (3)

---

[1] Пусть даже настолько слабого, что оно не влияет ни на дисперсию колебаний, ни на движение ионов.

решаются так же просто. Вычисления показали, что то́ковая скорость электронов $\bar{v}$ составляет 2,1 $\mu^{2/5}$ от их среднеквадратичной скорости $(\overline{v^2})^{1/2}$. Надо, впрочем, отметить, что теперь, в отличие от рассмотренных выше случаев, учет "косых" волн может привести к заметному изменению решения. Так, приближенный анализ, проведенный в работе [1] с учетом "косых" волн показал, что $\bar{v} \sim \mu^{1/4} (\overline{v^2})^{1/2}$.

Институт ядерной физики
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
17 сентября 1970 г.

Литература

[1] Г.Е.Векштейн, Р.З.Сагдеев. Письма в ЖЭТФ, 11, 297, 1970.